Bornes pour les parties de $\mathbb{N}$

Dédou

Mars 2012

Minimum d'une partie de $\mathbb{N}$

Définition

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $P \subset \mathbb{N}$, on dit que m est un minimum de P ssi m est un élément de P plus petit que tous les autres, autrement dit ssi

$$m \in P \text{ et } \forall n, n \in P \Rightarrow m \leq n.$$

Exemple

Pour $a \leq b$, a est un minimum de $[a..b]$.

Unicité du minimum d'une partie de $\mathbb{N}$

Proposition

Une partie de $\mathbb{N}$ a au plus un minimum.

Preuve : ForallB ForallB ForallB ImpB EtC ReecC ReecC EtC EtC ForallC ImpC Hyp ForallC ImpC Hyp Inv(antisym) ForallC ForallC ImpC EtB Hyp Hyp Hyp.

Désormais on dira "m est le minimum de P"

au lieu de "m est un minimum de P".

Parties non vides de $\mathbb{N}$

Notation

On va noter $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties non vides de $\mathbb{N}$.

Minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$

Proposition

Toute partie non-vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum.

Preuve de

$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$ si P est non vide alors
$$\exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$$

Ce qu'on dit

On montre par récurrence sur n que si $P \cap [0..n]$ est non vide, alors P admet un élément plus petit que tous les autres.
Pour $n = 0$, on voit que 0 est dans P et il est évidemment plus petit que tout autre élément de P.
Pour n quelconque, si P admet un élément strictement plus petit que n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Dans le cas contraire, comme P contient un élément inférieur à n, on voit que cet élément ne peut être que n et qu'il est inférieur à tous les autres éléments de P.

La preuve

On veut raisonner par récurrence mais

notre énoncé ne commence pas par $\forall n$...
Alors on en forge un autre R plus fort.
C'est la tactique Observer, il faudra prouver R et $R \Rightarrow E$.
Pour R,on prend

$$\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$
$$P \cap [0..n] \text{ non vide} \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$$

Preuve de $R \Rightarrow E$

$$(\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$
$$P \cap [0..n] \text{ non vide} \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p)$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}), P \text{ non vide} \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$$

Preuve

ImpB, ForallB (P), ImpB, ReecC (est non vide), ExistC(n), ForallC[n], ForallC[P], ImpC, ReecC (est non vide), ExistB[n], ReecB($\cap$), EtB, Hyp, Facile ($n \in [0..n]$) .....

Exo 1

a) Trouvez la faute de frappe dans la preuve précédente.
b) Ecrivez l'objectif courant après ce début de preuve, et la tactique qui le torche.

Preuve de R

$$\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \text{si} \quad P \cap [0..n] \text{ est non vide } \text{ alors } \exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \leq p.$$

La preuve

Rec, ForallB (P), ImpB, ExistB[0], ReecC(est non vide), ExistC(t), ReecC($\cap$), ReecC($\in [0..0)$), RessC($t \leq 0 \Rightarrow t = 0$), ReecB(t=0), EtB, Hyp, ForallB(p), RessB($0 \leq t$)
ForallB(n), ImpB, ForallB(P), ForallC[P], ImpB,
Selon[$P \cap [0..n]$ non vide],
1-ImpC, Hyp, Hyp
2- ReecC(est non vide), ExistC(t), ReecC($\cap$), EtC, ExistB[t], EtB, Hyp, ForallB(p), ForallC[p] ...

Exo 2

Ecrivez l'objectif courant après ce début de preuve.

Minimum d'une partie non vide de $\mathbb{N}$

Voici la carte de visite de ce minimum

$$\begin{array}{rccc} \min : & \mathcal{P}^*(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{N} \\ & P & \mapsto & \min(P) \end{array}$$

Mais qu'est-ce qu'on va donner comme formule ?

Définition du minimum

Voici ce qu'on a l'habitude de dire

Soit P une partie non vide de $\mathbb{N}$. Alors P admet un élément plus petit que tous les autres, qu'on appelle $\min P$.

Ce qu'il faut comprendre :

- $\min = \{(P, m) : \mathcal{P}^*(\mathbb{N}) \times \mathbb{N} | m \in P$ et $\forall n : P, m \leq n\}$.
- Cette relation de $\mathcal{P}^*(\mathbb{N})$ dans $\mathbb{N}$ est une application.

Bien entendu il faut démontrer le second point, à savoir :

toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un unique élément plus petit que tous les autres.

C'est plus ou moins ce qu'on a démontré (où est la différence ?).

Et maintenant le maximum

Et maintenant le maximum !

Maximum d'une partie de $\mathbb{N}$

Définition

Pour $m \in \mathbb{N}$ et $P \subset \mathbb{N}$, on dit que m est un maximum de P ssi m est un élément de P plus grand que tous les autres, autrement dit ssi

$$m \in P \text{ et } \forall n, n \in P \Rightarrow m \geq n.$$

Exemple

Pour $a \leq b$, b est un maximum de $[a..b]$.

Unicité du maximum d'une partie de $\mathbb{N}$

Proposition

Une partie de $\mathbb{N}$ a au plus un maximum.

Désormais on dira "m est le maximum de P"

au lieu de "m est un maximum de P".

Exo 3

Ecrire une preuve de ça, qui privilégie l'action au contexte.

Parties bornées de $\mathbb{N}$

Notation

On va noter $\mathcal{P}_f(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties bornées (resp. $\mathcal{P}_f^*(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties bornées non-vides) de $\mathbb{N}$.

Le "f" est pour "fini" : les parties bornées sont les parties finies...

Maximum d'une partie bornée de $\mathbb{N}$

Proposition

Toute partie bornée non-vide de $\mathbb{N}$ admet un maximum.

Preuve de

$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N})$, si P $\text{est bornée et non-vide}$ alors

$$\exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$$

Ce qu'on dit

On montre par récurrence sur n que si P est contenu dans $[0..n]$, alors P admet un maximum.
Pour $n = 0$, on voit que 0 est forcément dans P et il est évidemment plus grand que tout autre élément de P.
Pour n quelconque, si P ne contient pas n, l'hypothèse de récurrence permet de conclure. Dans le cas contraire, n est évidemment le maximum de P.

La preuve

On veut raisonner par récurrence mais

notre énoncé ne commence pas par $\forall n$...
Alors on en forge un autre R plus fort.
C'est la tactique Observer, il faudra prouver R et $R \Rightarrow E$.
Pour R,on prend
$\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N})$,
$P \subset [0..n]$ et P $\text{non-vide} \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P$ et $\forall p : P, m \geq p$.

Preuve de $R \Rightarrow E$

$$(\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}),$$
$$\quad P \subset [0..n] \text{ et P } \mathrm{non\text{-}vide} \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p)$$
$$\Rightarrow$$
$$\forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}), P \ \mathrm{born\acute{e}e\ et\ non\text{-}vide} \Rightarrow \exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$$

Exo 4

Ecrivez le début de preuve de votre choix, et indiquez l'objectif qui vous pose un problème.

Preuve de R

$$\forall n : \mathbb{N}, \forall P : \mathcal{P}(\mathbb{N}), \quad \text{si} \quad P \subset [0..n] \text{ et P est non-vide} \quad \text{alors}$$
$$\exists m : \mathbb{N}, m \in P \text{ et } \forall p : P, m \geq p.$$

Exo 5

Ecrivez le début de preuve de votre choix, et indiquez l'objectif qui vous pose un problème.

Maximum d'une partie bornée non-vide de $\mathbb{N}$

Voici la carte de visite de ce maximum

$$\max : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f^*(\mathbb{N}) & \to & \mathbb{N} \\ P & \mapsto & \max(P) \end{array}$$

Exo 6

Comment définit-on cette application ?

Les propriétés caractéristiques du maximum

Proposition

Si P est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, alors $\max P$ est dans P et tout élément de P lui est inférieur.

Point de vue alternatif

Proposition

Si P est une partie non vide majorée de $\mathbb{N}$, alors $\max P$ est le minimum de l'ensemble (non-vide) des majorants de P.

La borne supérieure

On peut définir la borne supérieure de toute partie

à condition d'accepter la valeur $+\infty$.

Voici la carte de visite de la borne supérieure

$$\begin{array}{rccl} \mathit{sup}: & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \to & \overline{\mathbb{N}} \\ & P & \mapsto & \begin{array}[t]{ll} \text{si} \ \ P \text{ est vide} & \\ \text{alors} \ \ 0 & \\ \text{sinon} & \begin{array}[t]{l} \text{si} \ \ P \text{ est majorée} \\ \text{alors} \ \ \mathit{max}(P) \\ \text{sinon} \ \ +\infty \end{array} \end{array} \end{array}$$

Rappel

$\overline{\mathbb{N}}$ c'est $\mathbb{N}$ avec un élément $+\infty$ en plus : $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \amalg \{+\infty\}$.

L'ordre sur $\overline{\mathbb{N}}$

Voici la carte de visite de l'ordre sur $\overline{\mathbb{N}}$

$$
\begin{array}{rrcll}
\leq_{\overline{\mathbb{N}}}: & \overline{\mathbb{N}} \times \overline{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{B} & \\
 & (x, y) & \mapsto & \text{si} \quad y = +\infty & \\
 & & & \text{alors} \quad V & \\
 & & & \text{sinon} & \text{si} \quad x = +\infty \\
 & & & & \text{alors} \quad F \\
 & & & & \text{sinon} \quad x \leq y
\end{array}
$$

Bien voir qu'on définit $\leq_{\overline{\mathbb{N}}}$ à l'aide de $\leq$.

Cela dit, on n'écrit jamais $\leq_{\overline{\mathbb{N}}}$, mais (abusivement) simplement $\leq$.

Propriété caractéristique de la borne supérieure I

Proposition

Si P est une partie quelconque de $\mathbb{N}$, alors *supP* est le plus petit des majorants de P (dans $\overline{\mathbb{N}}$).

Autrement dit

Pour prouver $supP = M$, il suffit de prouver

$$(\forall p : P, p \leq M) \text{ et } \forall M' : \overline{\mathbb{N}}, (\forall p : P, p \leq M') \Rightarrow M \leq M'.$$

Ou encore, en contraposant

Pour prouver $supP = M$, il suffit de prouver

$$(\forall p : P, p \leq M) \text{ et } \forall M' : \mathbb{N}, M' < M \Rightarrow \exists p : P, p > M'.$$

Propriété caractéristique de la borne supérieure II

Proposition

Si P est une partie quelconque de $\mathbb{N}$, alors $supP$ est caractérisé par la propriété :

$$\forall y : \overline{\mathbb{N}}, y \geq supP \Leftrightarrow \forall p : P, y \geq p.$$

Autrement dit

Pour prouver $supP = M$, il suffit de prouver

$$\forall y : \overline{\mathbb{N}}, y \geq M \Leftrightarrow \forall p : P, y \geq p.$$

La borne inférieure

Voici la carte de visite de la borne inférieure

$$\begin{array}{rccl} \mathit{inf} : & \mathcal{P}(\mathbb{N}) & \rightarrow & \overline{\mathbb{N}} \\ & P & \mapsto & \begin{array}{ll} \text{si} & P \text{ est vide} \\ \text{alors} & +\infty \\ \text{sinon} & \min P \end{array} \end{array}$$

Borne supérieure et inclusion

La borne supérieure est croissante.

Exo 7

Formaliser et commencer une preuve de ça.

Borne supérieure et réunion

La borne supérieure de la réunion est le max des bornes supérieures.

Nécessite d'étendre max à $\overline{\mathbb{N}}$.

Exo 8

Définir max sur $\overline{\mathbb{N}}$.

Borne supérieure et intersection

La borne supérieure d'une intersection est inférieure aux deux bornes supérieures.

Exo 9

Formaliser et commencer une preuve de ça.

Borne supérieure et addition

La borne supérieure d'une somme est la somme des bornes supérieures.

Problème

Il faut définir la somme des parties et étendre la somme à $\overline{\mathbb{N}}$.

Borne inférieure et inclusion

Exo 10

Enoncez et démontrez ce qui se passe entre borne inférieure et inclusion.