Bolzano-Weierstrass

Dédou

Mai 2012

Le séquent initial

Le séquent initial, c'est

$$\vdash \forall u : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$u \text{ bornée} \Rightarrow \exists \ell : \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

On fait tout ce qui est gratuit :

La première salve

Le séquent initial, c'est

$$\vdash \forall u : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$u \text{ bornée} \Rightarrow \exists \ell : \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

On fait tout ce qui est gratuit :

ForallB, ImpB, EtC, ExistC, ExistC

Le nouveau séquent, c'est quoi ?

La première salve

Le séquent initial, c'est

$$\vdash \forall u : \mathbb{N} \to \mathbb{R},$$

$$u \text{ bornée} \Rightarrow \exists \ell : \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

On fait tout ce qui est gratuit :

ForallB, ImpB, EtC, ExistC, ExistC

Le nouveau séquent, c'est

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; m, M : \mathbb{R}; u \text{ minorée par } m; u \text{ majorée par } M$$

$$\vdash \exists \ell : \mathbb{R}, \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

La formule pour ℓ

La formule pour ℓ, c'est

$$\ell := \sup A \qquad \text{avec}$$

$$A := \{x : \mathbb{R} | \forall p : \mathbb{N}, \exists n : \mathbb{N}, n \geq p \text{ et } u_n \geq x\}.$$

Avec des mots, A est l'ensemble des réels (x) qui sont majorés par une infinité de termes de la suite u et ℓ est sa borne supérieure.

La formule pour ℓ de plus près

La formule pour ℓ, c'est

$$\ell := \sup A \qquad \text{avec}$$

$$A := \{x : \mathbb{R} | \forall p : \mathbb{N}, \exists n : \mathbb{N}, n \geq p \text{ et } u_n \geq x\}.$$

En termes de tactiques :

On invoque la ressource qui dit que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (InvoC), on l'applique à A (ForallC), on fait ImpC, puis EtB, on prouve facilement que A est non-vide (ExistB(m)), et majoré (ExistB(M)...), et on peut enfin faire ExistC(ℓ), suivi de ExistB(ℓ).

Le séquent courant

Le nouveau séquent, c'est

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\, m, M : \mathbb{R};\, u \text{ minorée par } m;\, u \text{ majorée par } M;\, \ell : \mathbb{R};$$

$$A := \ldots;\, \ell = \sup A \quad \vdash \quad \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

La formule pour σ

Le nouveau séquent, c'est

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}; m, M : \mathbb{R}; u \text{ minorée par } m; u \text{ majorée par } M; \ell : \mathbb{R};$$

$$A := \ldots; \ell = \sup A \quad \vdash \quad \exists \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

La formule pour σ :

On définit σ par récurrence, avec $\sigma_O := 0$ et

$$\sigma_{n+1} = \min\{p : \mathbb{N} | p > \sigma_n \text{ et } |u_p - \ell| < \frac{1}{n+1}\}.$$

La formule pour σ de plus près

La formule pour σ, en termes de tactiques :

Il faut invoquer le principe de récursion, bien sûr. Il faut aussi invoquer l'existence de la fonction min qui retourne le minimum d'une partie non-vide, et disons O pour la partie vide.

Le séquent courant

Le nouveau séquent, c'est

$$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R};\, m, M : \mathbb{R};\, u \text{ minorée par } m;\, u \text{ majorée par } M;\, \ell : \mathbb{R};$$

$$A := \ldots;\, \ell = \sup A;\, \min : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{N};\, \ldots;\, \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N};\, \sigma_O := 0;$$

$$\forall n : \mathbb{N}, \sigma_{n+1} = \min\{p : \mathbb{N} | p > \sigma_n \text{ et } |u_p - \ell| < \frac{1}{n+1}\}$$

$$\vdash \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

Le point crucial

Le point crucial, c'est l'observation suivante :

Pour tout n, l'ensemble dont σ_{n+1} est le min :

$$B_n := \{p : \mathbb{N} | p > \sigma_n \text{ et } |u_p - \ell| < \frac{1}{n+1}\}$$

est non vide. Et donc on a

$$\forall n : \mathbb{N}, \sigma_{n+1} > \sigma_n \text{ et } |u_{\sigma_{n+1}} - \ell| < \frac{1}{n+1}$$

et le reste est facile.

La preuve du point crucial

$$B_n := \{p : \mathbb{N} | p > \sigma_n \text{ et } \ell^- := \ell - \frac{1}{n+1} < u_p < \ell^+ := \ell + \frac{1}{n+1}\}$$

L'idée :

Le nombre ℓ^+ étant strictement plus grand que ℓ n'est pas dans A, ce qui signifie

$$\exists q : \mathbb{N}, \forall n : \mathbb{N}, n \geq q \Rightarrow u_n < \ell^+.$$

Le nombre ℓ^-, étant strictement plus petit que ℓ, est aussi strictement plus petit qu'un élément x de A, ce qui signifie

$$\forall p : \mathbb{N}, \exists n : \mathbb{N}, n \geq p \text{ et } u_n \geq x.$$

On fait alors ExistC(q), ForallC(p :=q), ExistC(n), ForallC (n :=n).

On en est où ?

Le séquent courant :

$$\ldots; \forall n : \mathbb{N}, \sigma_{n+1} > \sigma_n \text{ et } |u_{\sigma_{n+1}} - \ell| < \frac{1}{n+1}; \ldots$$
$$\vdash \sigma \text{ scroissante et } u \circ \sigma \to \ell.$$

On fait EtB, ForallB, ForallC, EtC, Hyp et on reste avec

$$\ldots; \forall n : \mathbb{N}, \sigma_{n+1} > \sigma_n \text{ et } |u_{\sigma_{n+1}} - \ell| < \frac{1}{n+1} \vdash u \circ \sigma \to \ell$$

Qui n'est pas trop difficile.