Appliquer, déduire, réduire, réécrire

Dédou

Mars 2011

Appliquer, c'est quoi ?

Le mot "appliquer"

est l'un des mots les plus employés dans les preuves, et il a plusieurs sens très différents les uns des autres.

On va essayer d'en faire le tour.

Appliquer une hypothèse

On a déjà vu la tactique ForallC, qui consiste à appliquer une hypothèse aux arguments qui nous intéressent.

Exemple

Je suis en train de montrer que tout multiple d'une fonction monotone est monotone. J'ai commencé par le cas f croissante et j'ai supposé que mon coefficient k est positif, et pour montrer que kf est croissante, j'ai fait deux ForallB et un ImpB, et je me retrouve avec l'objectif :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, fcroissante, k : \mathbb{R}, k \geq 0, xy : \mathbb{R}, x \leq y \vdash kf(x) \leq kf(y).$$

J'applique l'hypothèse "f croissante" à x et y, ce qui m'enrichit mon contexte avec l'implication

$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Appliquer une ressource

On a déjà rencontré l'invocation de ressource. Après l'invocation d'une ressource R, on se retrouve avec une nouvelle hypothèse qu'on s'empresse en général d'appliquer aux arguments adéquats. Dans la preuve écrite (ou orale) on résume l'enchaînement des tactiques Invoquer et ForallC en disant "J'applique la ressource R à (ou avec) ... (liste des arguments)".

Exemple

On reprend la preuve précédente là où on l'a laissée :

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad fcroissante, \quad k : \mathbb{R}, \quad k \geq 0,$$
$$x \quad y : \mathbb{R}, \quad x \leq y, \quad x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \qquad \vdash kf(x) \leq kf(y).$$

On fait ImpC puis Hyp et on se trouve face à

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad fcroissante, \quad k : \mathbb{R}, \quad k \geq 0,$$
$$x \quad y : \mathbb{R}, \quad x \leq y, \quad f(x) \leq f(y) \qquad \vdash kf(x) \leq kf(y).$$

Exemple, suite

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad fcroissante, \quad k : \mathbb{R}, \quad k \geq 0,$
$x \quad y : \mathbb{R}, \quad x \leq y, \quad f(x) \leq f(y) \qquad\qquad \vdash kf(x) \leq kf(y).$
On conclut "en appliquant le théorème de multiplication des inégalités" qui dit par exemple :

$$\forall a \ b \ c : \mathbb{R}, a \leq b \text{ and } c \geq 0 \Rightarrow ca \leq cb.$$

On entend par là qu'on invoque cette ressource, et qu'on l'applique aux arguments $f(x)$, $f(y)$ et k, et on ne dit rien des cinq tactiques qu'il faut encore faire, à savoir ImpC, EtB, Hyp, Hyp, Hyp.

Déduire et réduire

Quand on applique une hypothèse ou une ressource

on s'enrichit souvent d'une hypothèse de la forme $A \Rightarrow B$, et le plus souvent on est dans l'une des deux configurations suivantes.

- l'antécédent A de l'implication est déjà dans les hypothèses (ou "trivial").
- le conséquent B de l'implication est justement le but courant.

Dans chacun de ces deux cas, on enchaîne systématiquement avec un ImpC, et l'un au moins des deux objectifs générés est facile (réglé par Hyp)

On résume tout ça en écrivant selon le cas un texte du genre :

- "De R, on déduit B"
- "En appliquant R, on se réduit à prouver A".

Le cas favorable

Le cas le plus favorable, c'est quand

- l'antécédent A de l'implication est déjà dans les hypothèses (ou "trivial") et
- le conséquent B de l'implication est justement le but courant.

Dans ce cas, l'enchaînement ImpC, Hyp, Hyp gagne et on écrit par exemple "On conclut en appliquant R".

Réécrire

On a déjà parlé de Réécrire à propos des définitions : on a dit indifféremment expliciter ou réécrire quand il s'est agi de remplacer un nom par sa définition. Mais Réécrire est une tactique plus générale, qui sait exploiter n'importe quelle égalité.
Or, quand on applique une ressource, on tombe certes souvent sur une implication, mais on tombe aussi souvent sur une égalité. Ces égalités sont des hypothèses qu'on peut exploiter à travers la tactique Réécrire.

Réécrire au but

La tactique Réécrire au but

- le sens de cette tactique est que si on sait que A et B sont égaux, pour prouver G, il suffit de prouver le but G' obtenu en remplaçant, dans G, A par B, ici où là
- elle s'applique dès qu'on dispose d'une égalité à appliquer
- elle n'a comme argument les places dans G où on veut remplacer A et la ressource R qui fournit l'égalité $A = B$
- elle remplace l'objectif courant $C \vdash G$ par l'objectif $C \vdash G'$ comme indiqué plus haut
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : "En appliquant R, on se ramène à prouver G'."

Réécrire au contexte

La tactique Réécrire au contexte

c'est pareil sauf que c'est dans une hypothèse qu'on remplace A par B.

Simplifier

Simplifier

c'est appliquer la tactique Réécrire de façon intelligente jusqu'à obtenir une forme que tout le monde est d'accord pour trouver optimale. On peut donner un sens précis à tout ça, mais c'est inutilement compliqué. On peut simplifier au but et aussi au contexte.

Appliquer et appliquer

On aura remarqué qu'on emploie le mot “appliquer” pour

- instancier une hypothèse
- invoquer et instancier une ressource
- utiliser une hypothèse ou une ressource pour réduire le but
- utiliser une hypothèse ou une ressource pour déduire du contexte
- utiliser une hypothèse ou une ressource pour réécrire, au but ou au contexte.
- et même parfois, on parle d'appliquer une définition..

Induction

La tactique Induction

- on connaît bien cette tactique
- elle s'applique quand le but est de la forme $\forall n : \mathbb{N}, P(n)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace l'objectif courant
  $$C \vdash \forall n : \mathbb{N}, P(n) \text{ ou } C, n : \mathbb{N} \vdash P(n)$$
  par les deux objectifs
  $C \vdash P(0)$ et $C, n : \mathbb{N}, P(n) \vdash P(n+1)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple :
  "Raisonnons par récurrence sur n ..."

Exemples

776 Le minimum entre deux nombres est inférieur à chacun d'eux.
687 Les minorants du minimum de deux nombres sont les minorants communs à ces deux nombres.

Exo 1

Démontrer

La somme de deux nombres est toujours égale à celle de leur min et de leur max.

a) Formaliser.

b) Ecrivez la liste des tactiques en négligeant les buts faciles.

c) Rédigez votre preuve.

Exemples

147 2

Soit u une suite vérifiant $u_0 < u_1$ et pour tout entier n, $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est strictement croissante, il en est de même de u.

Exo 2

Démontrer

Soit u une suite vérifiant $u_{n+1} = f(u_n)$. Si f est croissante, alors u est monotone.

a) Formalisez.

b) Ecrivez la liste des tactiques en négligeant les buts faciles.

c) Rédigez votre preuve.

Exemples

315
$(1,2,3)$ est combinaison linéaire de $(0,1,2)$ et $(1,0,-1)$.
205
L'image d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.

Exo 3

Démontrer

Le noyau d'une application linéaire est un sous-espace vectoriel.
a) Formalisez.
b) Ecrivez la liste des tactiques en négligeant les buts faciles.
c)Rédigez votre preuve.