Parties (suite)

Dédou

Avril 2011

La réunion comme borne supérieure

La réunion de deux parties est leur borne supérieure

en ce sens que c'en est un majorant

$$\forall E : Ens, \forall A, B : \mathcal{P}(E), A \subset A \cup B \text{ et } B \subset A \cup B$$

et que c'est le plus petit :

$$\forall E : Ens, \forall A, B, C : \mathcal{P}(E), A \subset C \text{ et } B \subset C \Rightarrow A \cup B \subset C.$$

Exo 1

Prouver la première partie ...

L'intersection opère sur les parties

L'intersection des parties de E est une opération

dont la carte de visite est :

$$\begin{array}{rccc} \cap_E : & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & (X, Y) & \mapsto & X \cap Y \end{array}$$

Remarque

Ca marche parce que l'intersection de deux parties de E est encore une partie de E :

$$\forall E : Ens, \forall X \ \ Y : \mathcal{P}(E), X \cap Y \in \mathcal{P}(E).$$

Et ça, ça se prouve.

L'explicitation de l'intersection des parties

L'intersection des parties de E s'explicite comme suit

$$\forall A, B \subset E, \forall x : E, x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in A \text{ et } x \in B.$$

Et ça se démontre.

Propriétés de l'opération d'intersection

L'intersection des parties a les propriétés suivantes

- elle est "commutative" :
  $\forall E : Ens, \forall X\ Y : \mathcal{P}(E), X \cap Y = Y \cap X.$
- elle est "associative" :
  $\forall E : Ens, \forall X\ Y\ Z : \mathcal{P}(E), (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z).$
- elle a un "neutre" : $\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), X \cap E = E \cap X = X.$
- elle a un "absorbant" :
  $\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset.$

Et ça se démontre.

L'intersection comme borne inférieure

L'intersection de deux parties est leur borne inférieure

en ce sens que c'en est un minorant

$$\forall E : Ens, \forall A, B : \mathcal{P}(E), A \cap B \subset A \text{ et } A \cap B \subset B$$

et que c'est le plus grand :

$$\forall E : Ens, \forall A, B, C : \mathcal{P}(E), C \subset A \text{ et } C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B.$$

Exo 2

Prouver la deuxième partie ...

Le complémentaire des parties

Le complémentaire des parties de E

a la carte de visite suivante :

$$\complement_E : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & \complement_E(X) \end{array}$$

L'explicitation du complémentaire

Le complémentaire des parties de E s'explicite comme suit

$$\forall A \subset E, \forall x : E, x \in \complement(A) \Leftrightarrow x \notin A.$$

Et ça se démontre.

Propriétés du complémentaire

L'opération de passage au complémentaire a les propriétés suivantes

- elle est "involutive" : $\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), \complement(\complement(X)) = X$.
- et donc elle est bijective
- elle est "décroissante" :
  $\forall E : Ens, \forall X\ \ Y : \mathcal{P}(E), X \subset Y \Leftrightarrow \complement(Y) \subset \complement(X)$.

Une caractérisation du complémentaire

Le complémentaire est caractérisé par la propriété suivante

$$\forall E : Ens, \forall A : \mathcal{P}(E), A \cap \complement(A) = \emptyset \text{ et } A \cup \complement(A) = E.$$

Exo 3

Enoncer cette caractérisation.

Complémentaire d'une réunion

Le complémentaire d'une réunion

c'est l'intersection des complémentaires.

Exo 4

Formaliser cette propriété.

Complémentaire d'une intersection

Le complémentaire d'une intersection

c'est la réunion des complémentaires.

Fonction caractéristique

La fonction caractéristique d'une partie A de E

a la carte de visite suivante

$$\begin{array}{rccc} \chi_A : & E & \longrightarrow & \mathbb{B} \\ & x & \longmapsto & x \in A \end{array}$$

Exemple

La fonction caractéristique de $I := [0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ est la fonction

$$\chi_I := \quad \text{if} \quad x \geq 0 \quad \text{then} \quad V \quad \text{else} \quad F.$$

Fonction caractéristique et opérations

La fonction caractéristique d'une intersection

est la conjonction des fonctions caractéristiques :

La fonction caractéristique d'une réunion

est la disjonction des fonctions caractéristiques :

La fonction caractéristique d'un complémentaire

est la négation de la fonction caractéristique initiale.

Et tout ça se démontre.

La construction support

Voici la carte de visite de la construction support (pour $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{rccl} supp : & (\mathbb{R} \to \mathbb{B}) & \to & Ens \\ & P & \mapsto & supp(P) \\ & P & \mapsto & \{x : \mathbb{R} | P(x)\} \end{array}$$

- $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$ se lit
  "l'ensemble des x de $\mathbb{R}$ vérifiant (ou tels que) $P(x)$"
- les éléments de cet ensemble sont les réels vérifiant P
- dans $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$, la variable x est liée
- on a donc $\{x : \mathbb{R} | P(x)\} = \{y : \mathbb{R} | P(y)\}$.

Exemple

On a $\{x : \mathbb{R} | x > e \text{ et } x < \pi\} =]e, \pi[$.

Les autres constructions support

Il y a une construction support par ensemble.

Exemple

Dans un ensemble quelconque E, on a toujours au moins la partie vide $\{x : E | Faux\}$ et la partie "pleine" $\{x : E | Vrai\}$ Ici Vrai et Faux désignent les fonctions constantes de E dans $\mathbb{B}$.

Les éléments d'un support

Comme son nom l'indique

Les éléments de $\{x : \mathbb{R} | P(x)\}$ sont les réels vérifiant P

On a donc la règle d'explicitation :

$\forall a : \mathbb{R}, \forall P : \mathbb{R} \to \mathbb{B},$

$$a \in \{x : \mathbb{R} | P(x)\} \Leftrightarrow P(a).$$

Exemple

On a $e + \pi \in \{x : \mathbb{R} | x^2 \leq x\}$ ssi $(e + \pi)^2 \leq e + \pi$.

Exo 1

Explicitez $1 + \sqrt{2} \in \{x : \mathbb{R} | x^2 - x - 1 = 0\}$.

Support et fonction caractéristique

L'application support : $(E \longrightarrow \mathbb{B}) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$

est bijective et sa réciproque est l'application "fonction caractéristique : $\mathcal{P}(E) \longrightarrow (E \longrightarrow \mathbb{B})$.

Et ça se démontre.