Parties

Dédou

Avril 2011

Dans ce chapitre

En guise d'ensembles

on revisite ce qui concerne les ensembles dans le cadre restreint des parties d'un ensemble.

L'ensemble des parties

Etant donné un ensemble E

les ensembles qui sont contenus dans E sont les éléments d'un nouvel ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$.

Voici la carte de visite de la construction $\mathcal{P}$

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{P} : & Ens & \longrightarrow & Ens \\ & E & \longmapsto & \mathcal{P}(P) \end{array}$$

Exemples

a) L'intervalle $]-1,+1]$ est un élément de $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.
b) Dans $\mathcal{P}(E)$, y'a toujours $\emptyset$ et E :

$$\forall E : Ens, \emptyset \in \mathcal{P}(E), \qquad \forall E : Ens, E \in \mathcal{P}(E).$$

Et ça se démontre.

L'explicitation de $\mathcal{P}$

La règle d'explicitation de $\mathcal{P}$ est comme suit :

$$\forall E\ X : Ens, X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E.$$

Remarque

Le sens de tout ça, c'est qu'étant donné E,les X contenus dans E forment un ensemble, et cet ensemble c'est $\mathcal{P}(E)$. Si on avait pris les X qui contiennent E, il y en aurait eu trop et ils n'auraient pas formé un ensemble ; d'ailleurs pour $E := \emptyset$, ça aurait fait tous les ensembles, et on sait bien que "l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas".

L'inclusion des parties

Si on restreint l'inclusion aux parties d'un ensemble E,

on obtient une relation dont voici la carte de visite :

$$\begin{array}{rccl} \subset_E : & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & Prop \\ & (X, Y) & \longmapsto & X \subset Y \end{array}$$

Cette inclusion s'explicite comme suit :

$$\forall E : Ens, \forall\ X\ \ Y : \mathcal{P}(E), X \subset Y \Leftrightarrow \forall a : E, a \in X \Rightarrow a \in Y.$$

Remarque

Bien voir les différences avec la régle pour l'inclusion générale :

$$\forall\ X\ \ Y : Ens, X \subset Y \Leftrightarrow \forall a : Ens, a \in X \Rightarrow a \in Y.$$

L'inclusion ordonne les parties

L'inclusion des parties est un ordre au sens suivant :

- elle est "réflexive" : $\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), X \subset X$.
- elle est "transitive" :
  $\forall E : Ens, \forall X \;\; Y \;\; Z : \mathcal{P}(E), X \subset Y$ et $Y \subset Z \Rightarrow X \subset Z$.
- elle est "antisymétrique" :
  $\forall E : Ens, \forall X \;\; Y : \mathcal{P}(E), X \subset Y$ et $Y \subset X \Rightarrow X = Y$.

Et ça se démontre.

Remarque

L'ordre sur les réels est "total", en ce sens qu'étant donné deux réels, l'un des deux est au moins égal à l'autre.
L'ordre sur les parties, lui, n'est pas "total" (en général) : par exemple étant donné deux parties de $\mathbb{R}$, il n'y en a pas forcément une des deux qui contient l'autre. Aucun des deux intervalles $[0, 1]$ et $[1, 2]$ ne contient l'autre.

Partie maximum et partie minimum

Dans $\mathcal{P}(E)$ y'a une partie minimum

$$\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), \emptyset \subset X.$$

Et ça se prouve.

Et pareil pour le maximum

$$\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), X \subset E.$$

L'égalité des parties

La propriété d'antisymétrie nous fait penser à l'explicitation de l'égalité.

La règle d'explicitation de l'égalité des parties, c'est

$$\forall E : \mathit{Ens} \forall\ X\ \ Y : \mathcal{P}(E), X = Y \Leftrightarrow X \subset Y \text{ et } Y \subset X.$$

Remarque

Le sens de tout ça, c'est qu'étant donné E,les X contenus dans E forment un ensemble, et cet ensemble c'est $\mathcal{P}(E)$. Si on avait pris les X qui contiennent E, il y en aurait eu trop et ils n'auraient pas formé un ensemble ; d'ailleurs pour $E := \emptyset$, ça aurait fait tous les ensembles, et on sait bien que "l'ensemble de tous les ensembles n'existe pas".

L'appartenance aux parties

Si on restreint l'appartenance aux éléments et aux parties d'un ensemble E,

on obtient une relation dont la carte de visite est conforme à notre intuition :

$$\begin{array}{rccc} \in_E : & E \times \mathcal{P}(E) & \to & Prop \\ & (X, P) & \mapsto & X \in P \end{array}$$

Remarque

Bien voir la différence avec l'appartenance générale,

$$\begin{array}{rccc} \in : & Ens \times Ens & \to & Prop \\ & (X, Y) & \mapsto & X \in Y \end{array}$$

dont les deux arguments ont le même type.

La réunion opère sur les parties

La réunion des parties de E est une opération

dont la carte de visite est :

$$\begin{array}{rccl} \cup_E : & \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{P}(E) \\ & (X, Y) & \mapsto & X \cup Y \end{array}$$

Remarque

Ca marche parce que la réunion de deux parties de E est encore une partie de E :

$$\forall E : Ens, \forall X \;\; Y : \mathcal{P}(E), X \cup Y \in \mathcal{P}(E).$$

Et ça, ça se prouve.

Propriétés de l'opération de réunion

La réunion des parties de E est une brave opération

- elle est "commutative" :
  $\forall E : Ens, \forall X\ Y : \mathcal{P}(E), X \cup Y = Y \cup X.$
- elle est "associative" :
  $\forall E : Ens, \forall X\ Y\ Z : \mathcal{P}(E), (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z).$
- elle a un "neutre" : $\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), X \cup \emptyset = E \cup \emptyset = X.$
- elle a un "absorbant" :
  $\forall E : Ens, \forall X : \mathcal{P}(E), X \cup E = E \cup X = E.$

Et ça se démontre.

Remarque

L'ordre sur les réels est "total", en ce sens qu'étant donné deux réels, l'un des deux est au moins égal à l'autre.
L'ordre sur les parties, lui, n'est pas "total" (en général) : par exemple étant donné deux parties de $\mathbb{R}$, il n'y en a pas forcément une des deux qui contient l'autre. Aucun des deux intervalles [0, 2]