Contextes

Dédou

Février 2011

Ce qu'on fait

En maths

- on écrit des formules, exemple "$\{\theta + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$" on écrit des énoncés, exemple "f est dérivable sur I"
- on pose des questions, exemple "calculer la limite de u"
- on argumente, exemple "soit x une solution de l'équation E".

Exo 1

Ecrivez votre énoncé favori.

L'ubiquité des contextes

Quoi qu'on fasse en maths

il y a toujours un contexte (parfois vide).

Pour comprendre quoi que ce soit en maths

il faut connaître (ou reconstituer) le contexte.

De quoi parle le contexte ?

Le contexte collecte

les **variables libres** qui apparaissent dans

- la formule ;

  exemple : x et k dans "$x + 2k\pi$"

- l'énoncé ;

  exemple : f et I dans "f est dérivable sur I"

- la question ;

  exemple : u dans "calculer la limite de u"

- l'argument ;

  exemple : E dans "soit x une solution de l'équation E".

Exo 2

Quelles sont les variables libres dans la formule $3x^2 + 5m$?

Que dit le contexte sur ces variables libres ?

Le contexte attribue un type

aux variables libres de

- la formule ;

  exemple : $x : \mathbb{Z}$ et $k : \mathbb{R}$ pour "$x + 2k\pi$"
- l'énoncé ;

  exemple : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $I \subset \mathbb{R}$ pour "f est dérivable sur I"
- la question ;

  exemple : $u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ pour "calculer la limite de u".
- l'argument ;

  exemple : $a : \mathbb{R}$ dans "soit x une racine carrée de a".

Exo 3

Proposez un type plus plausible pour x et k dans "$x + 2k\pi$".

C'est tout ce que dit le contexte sur ces variables libres ?

Ce n'est pas tout, le contexte collecte aussi

les hypothèses concernant les variables libres de

- la formule ;

  exemple : "$x > 1$ et $y \leq 3$" pour "$\ln x + \ln(4 - y)$"
- l'énoncé ;

  exemple : "f est dérivable" pour "$f'(3) = \pi$"
- la question ;

  exemple : "u converge" pour "calculer la limite de u".
- l'argument ;

  exemple : "$y > 3$ " pour "supposons d'abord $x \leq \ln(y - 3)$".

Exo 4

Proposez d'autres hypothèses plausibles pour "$\ln x + \ln(4 - y)$".

Finalement, c'est quoi un contexte ?

Un contexte, c'est

une liste de noms (de variables) avec un type pour chacune, et des hypothèses intercalées.

Exemple de contexte

$x : \mathbb{R}, k : \mathbb{Z}, 0 \leq x + 2k\pi \leq 2\pi, I \subset \mathbb{R}.$

$A \subset B$ est un raccourci pour dire que A est une partie de B.

Exo 5

Donnez votre contexte favori avec deux variables et deux hypothèses.

On peut écrire n'importe quelle liste ?

On ne peut pas écrire n'importe quoi :

exemple : $x : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, x \leq z$ n'est pas correct.
"On n'a droit qu'aux variables qui sont déclarées avant".
exemple : $x : \mathbb{R}, x^3 - x = 1, x : \mathbb{N}$ n'est pas correct.
"On ne peut pas utiliser deux fois le même nom de variable".

Exo 6

Lâchez-vous et écrivez votre contexte incorrect favori avec deux variables et deux hypothèses.

C’est quoi la différence entre : et $\in$?

Dans un contexte

: sert pour déclarer (introduire) une nouvelle variable, tandis que $\in$ sert comme d’habitude, par exemple pour formuler des hypothèses.

Exemple :

$x : \mathbb{R}, x^3 - x = 1, x : \mathbb{N}$ n’est pas correct, mais
$x : \mathbb{R}, x^3 - x = 1, x \in \mathbb{N}$ l’est.

Cette distinction n’a rien de fondamental.

D'où sortent toutes ces règles concernant les contextes ?

Les contextes, on n'en parle pas trop

- les contextes font partie de ces non-dits que les étudiants sont censés assimiler tout seuls.
- Les règles qu'on donne ici sont inconnues des matheux normaux.
- Elles sont largement inspirées de ce qui se pratique dans les langages de programmation.
- On aurait pu en choisir d'autres.

Les noms des hypothèses

En option, on peut donner des noms aux hypothèses

exemple : $x : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, H : x \leq y$.
Ca permet d'en parler plus facilement.

Exo 7

Rajouter des noms aux hypothèses dans le contexte suivant
a) $x : \mathbb{R}, x^2 \leq 1, n : \mathbb{N}, x^n + 1 = n.$
b) $x : \mathbb{R}, x^2 \leq 1, x \in \mathbb{N}, x^x + 1 = x.$

La première chose à savoir

c'est reconnaître les contextes corrects.

Exo 8

Correct ou incorrect (si incorrect, pourquoi ?) ?

a) $m : \mathbb{R}$, $n : \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $x^n + 1 = n$.

b) $x : \mathbb{R}$, $x^2 \leq 1$, $x \in \mathbb{N}$, $x^x + 1 = x$.

Contextes plausibles

La deuxième chose à savoir

c'est prendre conscience des contextes plausibles pour une formule (ou un énoncé, une question, un argument).

Exemple

Si Alice dit à Bob "f est continue en a", c'est qu'elle considère que Bob sait qui sont f et a ; ils sont d'accord sur un contexte, qui peut être aussi bien

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a : \mathbb{R}$$

que

$$I \subset \mathbb{R},\ f : I \to \mathbb{R},\ a : I.$$

Exo 9

Donnez un contexte plausible pour "f est croissante sur I".

L'erreur de contexte

L'erreur (fréquente) à ne plus faire , c'est

donner une réponse qui n'a pas de sens dans le contexte courant.

Exemple

- Si Alice dit à Bob : "Quelle est la limite de $u := n \mapsto \frac{n+a}{n^2+1}$?",
- c'est qu'elle considère que Bob sait qui est a, qui est dans le contexte.
- Mais si Bob répond : "La limite de u est $\frac{1}{n}$",
- sa réponse est pire que fausse, elle est débile,
- parce qu'il n'y a pas de n dans le contexte.

Exo 10

Donnez la bonne limite.

Les variables liées

La troisième chose à savoir c'est

ne pas confondre les variables **liées** et les variables **libres**.

Les variables liées

Exemple

- Quand Alice dit à Bob : "Quelle est la limite de $n \mapsto \frac{n+a}{n^2+1}$?",
- elle considère que Bob sait qui est a, mais pas n.
- Il n'y a pas de n dans le contexte,
- elle aurait aussi bien pu demander
- " quelle est la limite de $m \mapsto \frac{m+a}{m^2+1}$?".

Ici, m est une variable, certes, mais elle est **liée**.

Exo 11

Proposez un contexte plausible pour
"Est-ce que $f := x \mapsto 3 \sin x + p$ est majorée par M ?".

Comment reconnaître les variables libres ?

Les variables libres sont

sont celles qui ne sont pas liées...

Comment reconnaître les variables liées ?

Les variables liées

sont celles qui sont introduites par les constructions **liantes**.

Ma première construction liante

Ma première construction liante, c'est

la construction mapsto

$$\mapsto$$

- elle a deux "places" :

$$\_ \mapsto \_$$

- la première est réservée pour une variable liée (on dit aussi "muette").

Exo 12

Dans $n \mapsto x$, identifiez les variables libres et liées.

Ma deuxième construction liante

Ma deuxième construction liante, c'est

$$\text{l'intégrale (définie)} \quad \int$$

- elle a quatre "places"

$$\int_{\_}^{\_} \_ \, d\_$$

- cette fois c'est la quatrième qui est réservée à la variable liée
- on peut par exemple écrire $\int_2^3 (x+1)dx$
- la variable liée est disponible à la troisième place
- mais pas aux deux premières : $\int_{x-2}^{x+3} (x+1)dx$ est incorrect.

Exo 13

Dans $\int_{a+b}^{b+c} (a+c)dx$, identifiez les variables libres et liées.

Il y a d'autres constructions liantes ?

D'autres constructions liantes

- la construction lim pour les suites, elle a deux places $\lim_{\_}\ \_$
- c'est la place en indice qui est réservée à la variable liée : $\lim_n \frac{n}{n+1}$.
- la construction lim pour les fonctions, c'est un peu plus compliqué, on zappe
- la construction $\forall$ pour les énoncés, elle a trois places $\forall \_ : \_ ,\ \_$
- la première est pour la variable liée, et la deuxième pour son type : $\forall x : \mathbb{R}, x = x$.
- la construction $\exists$ fonctionne exactement comme $\forall$: $\exists z : \mathbb{C}, z^2 = -1$.

Exo 14

Changez les noms des variables liées dans les exemples ci-dessus.

C'est tout ?

Il y a encore les constructions de parties

- la première construction de parties a trois places $\{\_ : \_ \mid \_\}$
- la première place est pour la variable liée, et la deuxième pour son type : $\{x : \mathbb{R} |\ y = x^3 - 4x\}$.
- la seconde construction de parties est plus compliquée, on zappe.

Exo 15

Changez le nom de la variable liée dans l'exemple ci-dessus.

Et maintenant quand est-ce que le contexte change ?

On agrandit le contexte par des phrases du genre

- Soit f une fonction dérivable sur I
- Notons M un majorant de g
- Supposons que u tend vers un nombre L non nul
- Considérons deux réels x et y distincts de m
- Etant donné une autre fonction f croissante, montrer que $f + g$ est croissante.

Exo 16

Proposez un contexte plausible pour avant et après chacune de ces phrases.

L'explicitation d'un $\Rightarrow$ au but

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **explicite** un but qui commence par $\Rightarrow$.

- Si le but est de la forme $H \Rightarrow C$,
- on écrit par exemple "Supposons donc H et prouvons C."
- et le contexte courant s'enrichit de l'hypothèse H
- (tandis que le but devient C)

L'explicitation d'un $\forall$ au but

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **explicite** un but qui commence par $\forall$.

- Si le but est $\forall x : E$, *blabla*,
- on écrit par exemple "Soit donc x un élément quelconque de E et montrons *blabla*."
- et le contexte courant s'enrichit de $x : E$ tandis que le but devient *blabla*.

L'explicitation d'un $\exists$ en hypothèse

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **explicite** une hypothèse qui commence par $\exists$.

- Si une hypothèse est $\exists x : E$, *blabla*,
- on pourrait écrire par exemple "Soit donc x un élément de E vérifiant *blabla*."
- pendant que le contexte courant s'enrichit de $x : E$ et de l'hypothèse *blabla*.
- Mais en pratique on n'écrit plutôt rien :
- dans nos petites têtes, on ne fait pas vraiment de différence entre le contexte avec $\exists x : E$, *blabla*, et celui avec $x : E$ et l'hypothèse *blabla*.

La distinction selon

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **distingue selon** qu'une hypothèse est vraie ou fausse.

- Si on distingue deux cas selon que *blabla* est vrai ou non,
- on écrit par exemple
  "Traîtons d'abord le cas où *blabla* est vrai."
- pendant que le contexte courant s'enrichit de l'hypothèse *blabla*.
- Quand on a fini de traîter ce cas, il faut traîter le cas contraire
- on écrit par exemple
  "Traîtons maintenant le cas où *blabla* est faux."
- pendant que, dans le contexte courant,
  l'hypothèse *blabla* est remplacée par sa négation.

Le raisonnement par l'absurde

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **raisonne par l'absurde**.

- Pour d'émontrer *blabla* par l'absurde
- on écrit par exemple
  "Raisonnons par l'absurde."
- et le contexte s'enrichit de la négation de *blabla*.
- (et le but devient Faux)
- (Faux se prouve en prouvant un énoncé E et sa négation)
- (en général on choisit E déjà connu, si bien qu'il ne reste que $\overline{E}$ à prouver)

Les notations

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on introduit une notation.

- Dans une preuve, on peut vouloir donner un nom court, disons c à une formule longue, disons L.
- On écrit par exemple
  "On pose $c := L$."
- et le contexte s'enrichit de la variable $c : T$, où T est le type de L , avec l'hypothèse $c = L$.

Attention

le nom court doit vraiment être un nom et pas une autre formule. On ne peut par exemple pas poser
$c + d := L$.

En résumé

Dans une preuve, le contexte augmente

- quand on explicite un $\Rightarrow$ au but
- quand on explicite un $\forall$ au but
- quand on explicite un $\exists$ dans le contexte
- quand on distingue deux cas
- quand on introduit une notation.