Applications

Dédou

Avril 2011

Application

Définition

Une application (certains disent "fonction") de l'ensemble E vers l'ensemble F est une partie G de $E \times F$ vérifiant la condition d' "existence et unicité de l'image" :

$$\forall x \in E, \exists ! y \in F, (x, y) \in G.$$

Si une partie G de $E \times F$ vérifie cette condition, on dit aussi que G est un graphe.
On a donc le double langage "algébrique" et "géométrique".

Exemple

$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y^3 + y = x^2\}$ est un graphe.

Recette

Pour définir une application de E vers F,

il faut donc donner une partie G de $E \times F$ et prouver que c'est un graphe.

Exo 1

Prouver (en langage naturel) que $\{(x, y) : y^3 + y = x^2\}$. est un graphe.

Ensembles d'applications

Notation :

L'ensemble des applications de E vers F est noté $E \to F$.

Image et notation fonctionnelle

Définition

Si g est une application de E dans F et x un élément de E, on note $g(x)$ l'unique élément de F vérifiant $(x, y) \in g$, et on dit que c'est l'image de x par g.

Composition d'applications

Définition

Soient R, S, T trois ensembles, f une application de R dans S et g une application de S dans T. On définit leur composée par la formule

$$g \circ f := \{(x,z) : R \times T | \exists y : S, (x,y) \in f \text{ et } (y,z) \in g\}.$$

Proposition

Dans le même contexte, $g \circ f$ est une application .

Et ça se prouve.

Associativité

Proposition

La composition des applications est associative.

L'égalité des applications

Proposition

Deux applications g et h de E dans F sont égales ssi tout x de E a la même image par g et par h.

Et ça se prouve.

La construction mapsto

En pratique,

on définit une application $f : E \longrightarrow F$ par une formule identifiant $f(x)$.
Pour bien gérer le statut spécial de la variable x, au lieu de noter notre application $f(x)$, ce qui serait frauduleux (pas de x dans le contexte), on la note $x \mapsto f(x)$.

Applications injectives

Définition

on dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est injective si elle vérifie la condition d'unicité des antédédents :

$$\forall x,\ y : E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est une application injective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriétés des applications injectives

Proposition

i) la composée de deux applications injectives est injective
ii) si $g \circ f$ est injective, alors f est injective
iii) si $f \circ g$ et $f \circ h$ sont égales et f est injective, alors g et h sont égales.
iv) si $f : E \longrightarrow F$ est injective avec E non vide, alors il existe $g : F \longrightarrow E$ avec $g \circ f = Id_E$.

Applications surjectives

Définition

on dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est surjective si elle vérifie la condition d'existence des antédédents :

$$\forall y : F, \exists x : E, f(x) = y.$$

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3$ est une application surjective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Propriétés des applications surjectives

Proposition

i) la composée de deux applications surjectives est surjective
ii) si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective
iii) si $g \circ f$ et $h \circ f$ sont égales et f est surjective, alors g et h sont égales.

L'axiome du choix

L'énoncé suivant est plutôt vrai mais pas démontrable

iv) si $f : E \longrightarrow F$ est surjective, alors il pourrait bien exister $g : F \longrightarrow E$ avec $f \circ g = Id_F$.

L'hypothèse du continu

L'énoncé suivant est plutôt vrai mais pas démontrable

Soit P une partie non vide de $\mathbb{R}$. Alors ou bien P est l'image d'une application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ ou bien P est l'image d'une application injective $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Applications bijectives

Définition

on dit que l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective si elle est injective et surjective, autrement dit si elle vérifie la condition d'existence et d'unicité des antécédents.

Proposition

Si l'application $f : E \longrightarrow F$ est bijective alors
$recf := \{(y, x) \in F \times E | y = f(x)\}$ est une application qui vérifie
$f \circ recf = Id_F$ et $recf \circ f = Id_E$.

Ici, on a noté Id_X, l'identité de X, définie par
$Id_X : X \longrightarrow X := x \mapsto x$.