Environnements et contextes

Dédou

Janvier 2013

Ce qu'on fait

En maths

- on écrit des formules, exemple "$\{\theta + 2k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$"
- on écrit des énoncés, exemple "f est dérivable sur I"
- on pose des questions, exemple "calculer la limite de u"
- on argumente, exemple "soit x une solution de l'équation E".

L'ubiquité des contextes

Quoi qu'on fasse en maths

il y a toujours un environnement et un contexte (parfois vides).

Pour comprendre quoi que ce soit en maths

- il faut identifier les variables (libres), qui constituent l'environnement, et
- connaître (ou reconstituer) les hypothèses en cours de validité, qui, avec l'environnement, constituent le contexte.

Contexte et environnement

La pratique courante

met variables et hypothèses dans le même sac, et ne fait pas de différence entre environnement et contexte.

Nous, on parlera d'environnement pour les variables seules

et de contexte pour le tout.

Ecriture des contextes

On n'écrira que des contextes dans lesquels

pour chaque variable, disons x de l'environnement, on a une hypothèse "de typage" pour x : $x \in T$.

Ainsi l'environnement sera sous-entendu, et facile à reconstituer.

Exemple

Dans le contexte

$$x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, \cos x = \cos y, \sin x = \sin y$$

l'environnement est constitué de x et y.

Les variables liées

La première chose à savoir c'est

ne pas confondre les variables **liées** et les variables **libres**.

Les variables liées

Exemple

- Quand Alice dit à Bob : "Quelle est la limite de $n \mapsto \frac{n+a}{n^2+1}$?",
- elle considère que Bob sait qui est a, mais pas n.
- Il n'y a pas de n dans l'environnement,
- elle aurait aussi bien pu demander
- " quelle est la limite de $m \mapsto \frac{m+a}{m^2+1}$?".

Ici, m est une variable, certes, mais elle est **liée**.

Comment reconnaître les variables libres ?

Les variables libres sont

sont celles qui ne sont pas liées...

Comment reconnaître les variables liées ?

Les variables liées

sont celles qui sont introduites par les constructions **liantes**.

Ma première construction liante

Ma première construction liante, c'est

la construction mapsto

$$\mapsto$$

- elle a deux "places" :

$$\_ \mapsto \_$$

- la première est réservée pour une variable liée (on dit aussi "muette").

Exo 1

Dans $n \mapsto x$, identifiez les variables libres et liées.

Ma deuxième construction liante

Ma deuxième construction liante, c'est

l'intégrale (définie) $\int$

- elle a quatre "places"

$$\int_{\_}^{\_} \_ \, d\_$$

- cette fois c'est la quatrième qui est réservée à la variable liée
- on peut par exemple écrire $\int_2^3 (x+1)dx$
- la variable liée est disponible à la troisième place
- mais pas aux deux premières : $\int_{x-2}^{x+3} (x+1)dx$ est incorrect.

Exo 2

Dans $\int_{a+b}^{b+c} (a+x)dx$, identifiez les variables libres et liées.

Il y a d'autres constructions liantes ?

D'autres constructions liantes

- la construction lim pour les suites, elle a deux places $\lim_{\_}\ \_$
- c'est la place en indice qui est réservée à la variable liée : $\lim_n \frac{n}{n+1}$.
- la construction lim pour les fonctions, c'est un peu plus compliqué, on zappe
- la construction $\forall$ pour les énoncés, elle a trois places $\forall \_ : \_,\ \_$
- la première est pour la variable liée, et la deuxième pour son type : $\forall x : \mathbb{R}, x = x$.
- la construction $\exists$ fonctionne exactement comme $\forall$: $\exists z : \mathbb{C}, z^2 = -1$.

C'est tout ?

Il y a encore les constructions de parties

- la première construction de parties a trois places $\{\_ : \_ \mid \_\}$
- la première place est pour la variable liée, et la deuxième pour son type : $\{x : \mathbb{R} |\ y = x^3 - 4x\}$.
- la seconde construction de parties est plus compliquée, on zappe.

Et maintenant quand est-ce que l'environnement et/ou le contexte changent ?

On agrandit l'environnement et/ou le contexte par des phrases du genre

- Soit f une fonction dérivable sur I
- Notons M un majorant de g
- Supposons que u tend vers un nombre L non nul
- Considérons deux réels x et y distincts de m
- Etant donné une autre fonction f croissante, montrer que $f + g$ est croissante.

Exo 3

Proposez un environnement et un contexte plausibles pour avant et après cette dernière phrase.

L'explicitation d'un $\Rightarrow$ au but

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **explicite** un but qui commence par $\Rightarrow$.

- Si le but est de la forme $H \Rightarrow C$,
- on écrit par exemple "Supposons donc H et prouvons C."
- et le contexte courant s'enrichit de l'hypothèse H
- (tandis que le but devient C)

L'explicitation d'un $\forall$ au but

Dans une preuve, l'environnement augmente

quand on **explicite** un but qui commence par $\forall$.

- Si le but est $\forall x : E, P$,
- on écrit par exemple "Soit donc x un élément quelconque de E et montrons P."
- l'"environnement s'enrichit de x et le contexte courant s'enrichit de $x \in E$ tandis que le but devient P.

L'explicitation d'un $\exists$ en hypothèse

Dans une preuve, l'environnement et le contexte augmentent

quand on **explicite** une hypothèse qui commence par $\exists$.

- Si une hypothèse est $\exists x : E, P$,
- on pourrait écrire par exemple "Soit donc x un élément de E vérifiant P."
- pendant que l'environnement courant s'enrichit de x
- tandis que le contexte courant s'enrichit de $x \in E$ et de l'hypothèse P.
- Mais en pratique on n'écrit plutôt rien :
- dans nos petites têtes, on ne fait pas vraiment de différence entre le contexte avec $\exists x : E, P$, et celui avec $x : E$ et l'hypothèse P.

La distinction selon

Dans une preuve de la vraie vie, le contexte augmente

quand on **distingue selon** qu'une hypothèse est vraie ou fausse.

- Si on distingue deux cas selon que P est vrai ou non,
- on écrit par exemple
  "Traîtons d'abord le cas où P est vrai."
- pendant que le contexte courant s'enrichit de l'hypothèse P.
- Quand on a fini de traîter ce cas, il faut traîter le cas contraire
- on écrit par exemple
  "Traîtons maintenant le cas où P est faux."
- pendant que, dans le contexte courant,
  l'hypothèse P est remplacée par sa négation.

Le raisonnement par l'absurde

Dans une preuve, le contexte augmente

quand on **raisonne par l'absurde**.

- Pour démontrer G par l'absurde
- on écrit par exemple
  "Raisonnons par l'absurde."
- et le contexte s'enrichit de la négation de G.
- (et le but devient Faux)

On comprendra ça un peu mieux plus tard.

Les notations

Dans une preuve de la vraie vie, le contexte augmente

quand on introduit une définition.

- Dans une preuve, on peut vouloir donner un nom court, disons c, à une formule longue, disons L.
- On écrit par exemple
  "On pose $c := L$."
- l'environnement courant s'enrichit de c
- tandis que le contexte courant s'enrichit des informations $c \in T$, où T est le type de L , et $c = L$.

En résumé

Dans une preuve, l'environnement et éventuellement le contexte augmentent quand

- on explicite un $\Rightarrow$ au but
- on explicite un $\forall$ au but
- on explicite un $\exists$ dans le contexte
- on distingue deux cas
- on raisonne par l'absurde
- on introduit une définition.