Vérité

Dédou

Janvier 2012

La mesure

Si on veut définir une mesure

une approche standard consiste à

- préciser le genre d'objets qu'on veut mesurer
- spécifier quelle mesure on veut attribuer auxquels de ces objets
- identifier des sous-ensembles d'objets pour lesquels on donne des procédures de calcul de la mesure.

Exemple : la limite

La limite

- on veut mesurer les suites (bornées) de nombres réels
- on a deux superbes notions de convergence et de limite, non algorithmiques
- il y a l'ensemble des suites "élémentaires" dont on peut calculer la limite avec les méthodes de terminale et celui des suites "spéciales" qu'on peut traîter en maths spé.

Exercice

Donnez un autre exemple de cette démarche.

La vérité

Si on veut définir une notion de vérité pour nos énoncés

l'approche standard demande donc

1. spécifier ou caractériser ceux qu'on espère traîter et la valeur qu'on leur attribue, autrement dit dire ce que c'est qu'un énoncé vrai ou faux
2. identifier des sous-ensembles pour lesquels on sait calculer la valeur de vérité.

Constat

On n'a pas de notion de vérité d'un énoncé

d'autant moins que

Deuxième incomplétude de Gödel

On ne peut pas être sûr que nos théories (Peano, ZF, ZFC) sont cohérentes.

On a juste la notion d'énoncé prouvable ou réfutable :

pour un tel énoncé, on a un algo pour trouver une preuve ou une réfutation (on les essaie toutes les unes après les autres).

Mais cet algo ne fonctionne pas tout le temps :

Gödel et le tiers-exclu

En effet on sait depuis Gödel qu'on peut formuler un énoncé A tel que

ni A ni $\overline{A}$ n'est prouvable.

Par ailleurs

en logique classique

on a le tiers-exclu, à savoir que pour tout énoncé A, l'énoncé A or $\overline{A}$ est prouvable.

Dans une certaine mesure

on a une instance de A or B qui est vraie, sans que A soit vrai ou que B soit vrai.

Le sens du OU

Quel est le sens de OU

si $AOUB$ vrai ne veut pas dire que A est vrai ou B est vrai ?

On rêve d'

une notion de vérité indépendante de celle de prouvabilité

Le stratégie copycat aux échecs

C'est pour un joueur

qui joue simultanément sur deux échiquiers, contre deux adversaires, une fois avec les blancs et une fois avec les noirs.

Cette stratégie consiste à

attendre qu'un adversaire joue sur l'un des échiquiers et à reproduire la nouvelle position sur l'autre.

Ce joueur est sûr d'un bilan honorable :

une victoire et une défaite, ou deux nuls.

S'il n'y avait pas de nulle à ce jeu, il serait sûr de gagner sur l'un OU l'autre des échiquiers.

La portée de copycat

Copycat s'adapte à

à tout jeu "suffisamment polarisé".

si le jeu ne connaît pas de partie nulle

copycat assure de gagner sur l'un des deux tableaux.

La piste des jeux

Définir la vérité

à travers un jeu dans lequel

- deux équipes cherchent à valider des buts contradictoires
- chaque joueur gère non pas une formule mais éventuellement plusieurs formules
- chaque formule doit être polarisée : on sait, du joueur qui veut la prouver et de celui qui veut la réfuter, lequel doit prendre l'initiative.

Exemple

Pour un $\forall$, c'est celui qui doit réfuter qui a l'initiative :
il donne le témoin.

La logique linéaire

On va voir la logique linéaire

comme un jeu.