

Mes premières tactiques gratuites

Dédou

Janvier 2012

La tactique ForallB

- le sens de cette tactique est que, pour prouver $\forall x : E, P(x)$, il suffit de prouver $P(x)$ en supposant seulement que x est de type E
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $\forall x : E, P(x)$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace le séquent courant $C \vdash \forall x : E, P(x)$
par $C; x : E \vdash P(x)$
- elle est gratuite
- on peut écrire par exemple :
"Soit x un élément quelconque de E et prouvons $P(x)$ "

La règle d'inférence ForallB

Avant : $C \vdash \forall x : E, P(x)$

Après : $C; x : E \vdash P(x)$

Autrement dit :

$$\frac{C; x : E \vdash P(x)}{C \vdash \forall x : E, P(x)}$$

Exemple pour la tactique ForallB

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. Mon séquent initial est

$$\vdash \forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ et } g \text{ majorées} \Rightarrow f + g \text{ majorée.}$$

J'applique la tactique ForallB et mon séquent devient :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \vdash \forall g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ et } g \text{ majorée} \Rightarrow f + g \text{ majorée.}$$

Exo 1

Que devient ce séquent si j'applique une deuxième fois la tactique ForallB ?

La tactique Implique au but

- le sens de cette tactique est que pour prouver $A \Rightarrow B$, il faut (ou suffit de) prouver B sachant A
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \Rightarrow B$
- elle n'a pas d'argument
- elle remplace le séquent courant $(C \vdash A \Rightarrow B)$ par le séquent $C; A \vdash B$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire par exemple : Nous devons prouver $A \Rightarrow B$. Pour cela, supposons A et prouvons B .

La règle d'inférence ImpB

Avant : $C \vdash A \Rightarrow B$

Après : $C; A \vdash B$

$C \vdash A \Rightarrow B$

$C; A \vdash B$

Exemple pour la tactique ImpB

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. J'ai déjà fait deux ForallB et mon séquent courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \vdash f \text{ et } g \text{ majorées} \Rightarrow f + g \text{ majorée.}$$

J'applique la tactique ImpB et mon séquent devient :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ et } g \text{ majorées} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

Exo 2

Si on fait ForallB puis ImpB pour prouver que le cube d'une fonction croissante est croissante, quel séquent courant obtient-on ?

La tactique Et au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A and B , il suffit de prouver G sachant A et B
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A and B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs)
- elle remplace le séquent courant $C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G$ par le séquent $C'; A; B; C'' \vdash G$
- elle est "gratuite"
- cette tactique ne laisse pas de trace dans la rédaction.

La règle d'inférence EtC

Avant : $C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G$

Après : $C'; A; B; C'' \vdash G$

ou, si on préfère :

$$\frac{C'; A \text{ and } B; C'' \vdash G}{C'; A; B; C'' \vdash G}$$

Exemple pour la tactique EtC I

Exemple

J'essaie de démontrer que la somme de deux fonctions majorées est majorée. J'ai déjà fait deux ForallB et un ImpB et mon séquent courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ et } g \text{ majorées} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

J'explicité "majorées" et mon hypothèse devient f majorée and g majorée. J'applique la tactique EtC à cette hypothèse et mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ majorée}; g \text{ majorée} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

Exo 3

Formaliser l'énoncé "si une fonction est à la fois croissante et décroissante, elle est constante" et appliquez-lui trois tactiques successives.

Exemple pour la tactique EtC II

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est continue, alors son image est un intervalle. Mon séquent courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, y \in [f(a), f(b)] \\ \vdash \exists x : \mathbb{R}, f(x) = y.$$

J'explique $y \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \leq x$ and $x \leq f(b)$ puis j'applique la tactique Et au contexte. Mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ continue}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, y : \mathbb{R}, f(a) \leq y, y \leq f(b) \\ \vdash \exists x : \mathbb{R}, f(x) = y.$$

Exo 4

Rappelez la définition de $[a, b]$ (celle utilisée ci-dessus);
ou, si vous préférez :

dans l'exemple précédent, écrivez le contexte intermédiaire entre l'explicitation et la tactique.

La tactique ExistC

La tactique ExistC

- le sens de cette tactique est que savoir $\exists x : E, P(x)$, c'est comme avoir un x vérifiant $P(x)$
- elle s'applique lorsque le contexte courant comporte une hypothèse de la forme $\exists x : E, P(x)$
- elle a un argument, qui est cette hypothèse (pour le cas où il y a plusieurs hypothèses de cette forme)
- elle remplace le séquent courant

$$C'; \exists x : E, P(x); C'' \vdash G$$

par

$$C'; x : E; P(x); C'' \vdash G$$

- elle est gratuite
- c'est encore une tactique qui ne laisse pas de trace écrite.

Exemple pour la tactique ExistC I

Exemple

Je suis en train de démontrer que si f et g sont majorées alors $f + g$ est majorée. Mon séquent courant est

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ majorée}; g \text{ majorée} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

J'explicité la première hypothèse en $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$ puis j'applique la tactique ExistC au contexte.

Mon séquent courant devient :

$$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; M : \mathbb{R}; \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M; g \text{ majorée} \vdash f + g \text{ majorée.}$$

Exo 5

Ecrivez le séquent courant après une seconde application de la tactique ExistC.

Exemple pour la tactique ExistC II

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est monotone, alors $f[a, b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon séquent courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}; a, b : \mathbb{R}; a \leq b; y : \mathbb{R}; y \in f[a, b] \\ \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicité $y \in f[a, b]$ en $\exists x : [a, b], y = f(x)$ puis j'applique la tactique ExistC.

Mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}; a, b : \mathbb{R}; a \leq b; y : \mathbb{R}; x : [a, b]; y = f(x) \\ \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

La tactique Ou au contexte

- le sens de cette tactique est que pour prouver G sachant A or B , il suffit de traiter successivement le cas où A est vrai, puis celui où B est vrai
- elle s'applique lorsque le contexte courant contient une hypothèse de la forme A or B
- son argument, c'est l'hypothèse en question (il pourrait y en avoir plusieurs de cette forme)
- elle remplace le séquent courant $(C', A \text{ or } B, C'' \vdash G)$ par les deux séquents $(C', A, C'' \vdash G)$ et $(C', B, C'' \vdash G)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire : "On sait qu'on a A or B . Commençons par supposer A Et maintenant supposons B"

C'est notre première tactique qui augmente la taille de la pile.

Exemple pour la tactique OuC I

Exemple

Je cherche à montrer que si une fonction f est monotone, alors $f \circ f$ est croissante. J'ai fait ForallB et ImpB et mon séquent courant est

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ monotone} \vdash f \circ f \text{ croissante}$

J'explicité l'hypothèse " f monotone" en

$"f \text{ est croissante ou } f \text{ est décroissante}"$

et j'applique la tactique OuC.

Mon séquent courant devient :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante} \vdash f \circ f \text{ croissante}$

Exo 6

Cette dernière tactique a mis un nouveau séquent en attente.

Lequel ?

Exemple pour la tactique OuC II

Exemple

Je cherche à montrer que la composée de deux fonctions monotones est monotone.

Mon séquent courant est

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ monotone}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ monotone} \vdash f \circ g \text{ monotone}$

J'explicité l'hypothèse “ f monotone” en

“ f est croissante ou f est décroissante”

et j'applique cette tactique Ou au contexte.

Mon séquent courant devient :

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante}, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g \text{ monotone} \vdash f \circ g \text{ monotone}$

Exo 7

Cette dernière tactique a mis un nouveau séquent en attente.

Lequel ?

La tactique Et au but

La tactique Et au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver A and B , il suffit de prouver A puis B
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme A and B
- elle n' a pas d'argument
- elle remplace le séquent courant $(C \vdash A \text{ and } B)$ par les deux séquents : $(C \vdash A)$ et $(C \vdash B)$
- elle est "gratuite"
- on peut écrire (quelque chose de plus court que) : Nous devons prouver A and B . Pour cela, commençons par prouver A Et maintenant prouvons B

Exemple pour la tactique EtB

Exemple

Je suis en train de prouver que si f est croissante, alors $f[a, b]$ est contenu dans $[f(a), f(b)]$. Mon séquent courant est le suivant

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, a \leq b, y : \mathbb{R}; y \in f[a, b] \quad \vdash y \in [f(a), f(b)].$$

J'explicité $y \in [f(a), f(b)]$ en $f(a) \leq y$ and $y \leq f(b)$ puis j'applique la tactique EtB. Mon séquent courant devient

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ croissante}, a : \mathbb{R}, b : \mathbb{R}, a \leq b, y : \mathbb{R}; y \in f[a, b] \quad \vdash f(a) \leq y.$$

Exo 8

Cette dernière tactique a aussi mis un nouveau séquent en attente. Lequel ?

La tactique OuB

La tactique Ou au but

- le sens de cette tactique est que, pour prouver $A \text{ or } B$, il suffit de prouver de prouver B en supposant A faux, ou alors de prouver A en supposant B faux
- elle s'applique lorsque le but courant est de la forme $A \text{ or } B$
- elle a un argument qui est soit gauche (on choisit de prouver A) soit droite (on choisit de prouver B).
- elle remplace le séquent courant $C \vdash A \text{ or } B$
si son argument est gauche par $C; \overline{B} \vdash A$
et si son argument est droite par $C; \overline{A} \vdash B$
- elle est gratuite
- par exemple dans le cas de l'argument droit, on peut écrire :
Supposons que A est faux, et prouvons B ...

Exemple pour la tactique OuB

Exemple

J'essaie encore de démontrer que si f est monotone, $f \circ f$ l'est aussi. Mon séquent courant est

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante} \vdash f \circ f \text{ monotone.}$$

J'explicité le but puis j'applique à gauche la tactique OuB. Mon séquent courant devient :

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ croissante}; f \circ f \text{ non décroissante} \vdash f \circ f \text{ croissante.}$$

Exo 9

Bob en est au même point dans la preuve du même énoncé. Comme c'est un boulet, il applique la bonne tactique, mais à droite. Quel est son nouvel séquent ?