

Séquents

Dédou

Janvier 2012

On passe aux preuves

On a vu

les définitions et les énoncés.

Il nous reste à voir

les preuves.

Preuve et démonstration

c'est la même chose.

Que prouve-t-on ?

A la base

on veut prouver un énoncé.

Au final

on doit prouver un énoncé E dans un contexte C , voire plusieurs énoncés E_i chacun dans son contexte C_i .

C'est ça qu'on appelle des séquents.

Définition

Un séquent, c'est un contexte muni d'un énoncé qu'on appelle le but.

Exemples

Exemple

$$x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}, x \leq y \vdash x^2 \leq y^2.$$

Le symbole \vdash sépare le contexte du but ; il se lit “thèse”.

Dans cet exemple, on utilise quatre définitions pour \mathbb{R} , $<$, 3 et l'exponentiation.

Exo

Expliquer comment expliciter ce séquent.

Exo

Expliquer un séquent pour : étant donné un groupe G , le passage à l'inverse dans G est involutif..

Questions de validité

En pratique

chacun des énoncés considérés doit être bien défini dans son contexte, mais nous n'insisterons pas plus sur ce point.

Exemple

Si le contexte dit seulement que x est réel, l'énoncé ne peut pas être $\ln(x^2) = 2 \ln x$.

Prouver, c'est quoi ?

Prouver une pile de séquents, c'est

- gérer cette pile
- en respectant les règles de gestion (dites **règles d'inférence**)
- jusqu'à ce que la pile soit vide.

Au départ, on veut prouver un énoncé

- on en fait un séquent (avec le contexte vide)
- et on fait de ce séquent une pile à un élément.

Y'a plus qu'à..

Y'a plus qu'à

comprendre les **règles d'inférence**, qu'on appelle aussi tactiques, autrement dit comprendre ce qu'on a le droit de faire pour améliorer (ou saccager ?) la pile.

On va donner la liste des tactiques (règles de preuves).

En gros, une preuve d'un séquent O , c'est une liste de tactiques qui, appliquées l'une après l'autre, réduisent le séquent initial à zéro séquent.

Quand on fait une preuve, on gère une pile de séquents.

- Au départ de la preuve d'un énoncé E , la pile contient un seul séquent, dont le contexte est vide, et le but est E .
- La preuve consiste à appliquer des tactiques au séquent courant, le premier de la pile.
- Chaque tactique modifie le séquent courant, et éventuellement la pile.
- La preuve est finie quand la pile est vide.

Que dire sur chaque tactique ?

Pour chaque tactique, on va dire

- son sens
- à quels séquents elle s'applique
- ses arguments éventuels
- comment elle transforme la pile de séquents
- si elle est “gratuite” ou non
- comment elle se rédige.