Mon deuxième jeu logique: MALL

Dédou

Janvier 2010

Plan du chapitre

Les formules mult-additives

L'ensemble *MALL* des formules mult-additives

est défini par la grammaire :

$$M := 1|0|M \oplus M|M \otimes M|\top|\bot|M \& M|M ⅋ M.$$

Exercice

Ecrivez une formule impliquant tous les constructeurs.

Polarité

Les formules positives sont celles de la forme

$$1, 0, F \oplus F, F \otimes F.$$

Les autres sont dites négatives.

Comprendre les constantes

On a choisi de définir des connecteurs binaires, mais on aurait pu préférer introduire des connecteurs d'arité variable, genre

$$\oplus_{i\in I} A_i, \quad \otimes_{i\in I} A_i, \quad \&_{i\in I} A_i, \quad \invamp_{i\in I} A_i.$$

Eh bien les quatre constantes correspondent au cas $I := \emptyset$ pour ces quatre connecteurs avec arité variable.

Problème

Trouver une formulation catégorique de l'équivalence entre les deux présentations du jeu.

La négation

La négation

prolonge celle de ALL en échangeant $\otimes$ et $\parr$.

Exercice

Calculez la négation de $(\top \parr \top) \& (0 \otimes \top)$.

Les séquents

Un séquent, c'est

une famille finie de formules.

On dessine un séquent comme ça :

$$\vdash 0 \otimes \top, \bot ⅋ \top, 1$$

Mais le même séquent, on le dessine aussi avec les formules à gauche

$$\top ⅋ 0, 1 \otimes 0, \bot \vdash$$

ou avec des formules à gauche et à droite

$$\top ⅋ 0, 1 \otimes 0, \vdash 1.$$

Normalisation des séquents

Disons qu'un séquent normal, c'est

un séquent qui n'a des formules qu'à droite de $\vdash$.

Exercice

Normalisez le séquent

$$1 \parr \bot, 0 \vdash 0 \otimes \top, \bot.$$

Exemple

Si Toi et Moi s'affrontent autour de la formule F

on peut penser que Moi veut valider le séquent $\vdash F$ tandis que Toi veut valider $F \vdash$.
On a quelque chose comme

$$\vdash_M F \vdash_T .$$

Séquents formels et séquents dessinés

Exercice

Quel est le rapport entre les séquents dessinés et les séquents formels ?

Plan du chapitre

Exemple

Si on part de la position

$$\vdash_M 1 \otimes \bot \vdash_T,$$

après un coup, Moi devra gérer les deux séquents

$$\vdash_M 1 \quad \text{et} \quad \vdash_M \bot$$

tandis que Toi aura à gérer le seul séquent

$$1, \bot \vdash_T .$$

Toi et Moi partagent les formules mais les répartissent dans des séquents chacun à sa façon.

Prépositions

Une préposition, c'est

- une famille de formules de MALL indexée par un ensemble I fini
- un ensemble fini G (des séquents de Moi)
- un ensemble fini D (des séquents de Toi)
- deux applications $g : I \to G$ et $d : I \to D$ qui répartissent les formules dans les séquents
- un élément t de G ou de D, le témoin (token) qui repère le séquent "actif".

Exemple

- Si on part de la position $\vdash_M 1 \otimes \bot \vdash_T$ avec le témoin chez Toi
- Toi commence par passer le témoin à Moi
- ensuite Moi "casse" le $\otimes$ et repasse le témoin à l'unique séquent de Toi

$$1, \bot \vdash_T .$$

La condition d'acyclicité

Une position, c'est une préposition vérifiant

le graphe ayant

- $G \amalg D$ comme ensemble de sommets
- I comme ensemble d'arcs
- g et d comme source et but

est acyclique (un arbre).

Présentation alternative

Une position c'est

un arbre bipartite marqué dont les arcs sont annotés par des formules MALL positives.

On convient qu'

un arbre bipartite marqué dont les arcs sont annotés par des formules MALL quelconques représente la position obtenue en inversant le sens des arcs litigieux et les annotations correspondantes.

Plan du chapitre

Coups passifs

Le joueur qui a le témoin

peut choisir une formule négative dans le séquent actif, et passer le témoin "le long de cette formule" (ça impose le nouveau séquent actif).

Exercice

Dessiner "avant" et "après" un coup passif entre deux positions ayant deux séquents à droite et à gauche.

Coups additifs

Le joueur qui a le témoin peut

- choisir une formule de la forme $A \oplus B$ dans le séquent actif,
- et la remplacer par A, ou d'ailleurs par B
- et passer le témoin "le long de cette formule".

Exercice

Dessiner "avant" et "après" un coup additif entre deux positions ayant deux séquents à droite et à gauche.

Coups multiplicatifs

Le joueur qui a le témoin peut

- choisir une formule de la forme $A \otimes B$ dans le séquent actif,
- et passer le témoin "le long de cette formule"
- et casser son séquent en deux, avec A dans l'un et B dans l'autre
- et répartir à sa guise les autres formules de son séquent actif entre les deux séquents générés

Exercice

Dessiner "avant" et "après" un coup multiplicatif entre deux positions ayant deux séquents à droite et à gauche.

Coups constants

Si le séquent actif n'a que 1 comme formule, le joueur peut

- passer le témoin "le long du 1"
- supprimer le 1 et le séquent devenu vide de toute formule.

Exercice

Dessiner "avant" et "après" un coup constant entre deux positions ayant deux séquents à droite et à gauche.

Plan du chapitre

Le groupoïde des positions

Le graphoïde des coups

Plan du chapitre

1. Formules et séquents
2. Positions
3. Coups
4. Formalisation
5. La théorie de *MALL*
6. Coupures

La finitude

A chaque coup

quelque chose diminue : le nombre de noeuds dans les formules ?

La longueur des parties est bornée.

Tiers-exclu

Comme dans ALL

l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Exercice

Démontrez ça.

Exemple

Moi a une stratégie gagnante pour $\vdash \bot \otimes \bot$.
On n'est pas super content de ça.

Qui commence ?

Comme dans ALL

on se fout de qui commence parce que l'un des deux joueurs ne peut que passer la main à l'autre.

Evaluation

Cette fois

pas d'évaluation manifeste.

Preuves

On peut définir l'ensemble des preuves d'un séquent

- $wintop(S)$ est une preuve du séquent S si S a un $\top$
- $winun(S)$ est une preuve du séquent S si S n'a qu'un 1
- si p est une preuve de $\vdash \Gamma, A$ et q une preuve de $\vdash \Gamma, B$, $and(p, q)$ est une preuve de $\vdash \Gamma, A \& B$
- si p est une preuve de $\vdash \Gamma, A$ et q une preuve de $\vdash \Delta, B$, $\otimes(p, q)$ est une preuve de $\vdash \Delta, \Gamma, A \otimes B$
- ...

Exercice

Formulez les constructions de preuves manquantes.

Adéquation

A toute preuve d'une formule A

on peut associer une stratégie gagnante pour A.

Exercice

Expliquez ça.

Complétude

Exercice

Montrez que l'application précédente n'est plus même surjective.

Plan du chapitre

Le modus ponens

Le modus ponens dit

$$\frac{A \Rightarrow B \qquad A}{B}$$

ou en logique linéaire

$$\frac{A \multimap B \qquad A}{B}$$

Ma première coupure

La première règle de coupure dit

$$\frac{A \vdash B \qquad B \vdash C}{A \vdash C}$$

La règle de coupure

La règle de coupure dit

$$\frac{\Gamma \vdash B \qquad B \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

La prochaine règle de coupure

La prochaine règle de coupure devrait dire un truc du genre

$$\frac{\Gamma \vdash \Theta \qquad \Theta \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$

Mais c'est pas gagné.