# Matériel catégorique

Dédou

Janvier 2010

# Plan du chapitre

# Les données d'une catégorie

## Une catégorie $\mathcal{C}$ est constituée par

- un ensemble (éventuellement "gros") noté $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$ des objets de $\mathcal{C}$
- pour chaque couple $(A, B)$ d'objets de $\mathcal{C}$ un ensemble $\mathrm{Hom}(A, B)$ des morphismes de $A$ dans $B$
- pour chaque triplet $(A, B, C)$ d'objets de $\mathcal{C}$ une application $\circ_{A,B,C} : \mathrm{Hom}(B, C) \times \mathrm{Hom}(A, B) \to \mathrm{Hom}(A, C)$

vérifiant des conditions qu'on verra plus loin.

## Exemple

Les ensembles : soit $U$ un ensemble d'ensembles... c'est l'ensemble des objets d'une catégorie d'ensembles. Vous la voyez ?

## Exo

Choisissez votre catégorie favorite, et indiquez ses ingrédients.

# Les axiomes d'une catégorie

**Les données d'une catégorie $\mathcal{C}$ vérifient les conditions suivantes**

- identités
- associativité

**Exemple**

Les ensembles. Vous voyez identités ? associativité ?

**Exo**

Démontrez les axiomes de catégorie pour votre catégorie favorite.

# L'unicité des identités

## Exercice

- Donnez une définition d'une identité d'un objet d'une catégorie
- Montrez qu'il y a unicité de l'identité d'un objet d'une catégorie.

# Variante des catégories

**On peut définir les catégories autrement :**

en mettant les identités dans les données.

**Exercice**

Ecrivez cette définition de simili-catégorie.

# Définitions équivalentes

**N'importe quel mathématicien vous le dira :**

ces deux définitions de catégorie sont équivalentes.

Mais qu'est-ce que ça veut dire ? Une catégorie est un triplet tandis qu'une simili-catégorie est un quadruplet, ce n'est donc pas la même chose.

**Exercice**

Donnez un sens à la phrase informelle : les définitions de catégorie et de simili-catégorie sont équivalentes.

# Equivalence de définition

## C'est quoi une définition ?

En maths, c'est-à-dire en théorie des ensembles, il n'y a pas de définitions, il n'y a que des ensembles (et encore). Donc une définition c'est un ensemble. Et une équivalence entre deux définitions, ça pourrait être une bijection entre les deux ensembles. Les bijections sont les isomorphismes de la catégorie des ensembles.

## Exercice

Explicitez une bijection entre l'ensemble des catégories et celui des simili-catégories (d'un univers).

# Equivalence de définition (bis)

## Mais on veut mieux

On préfère les définitions qui spécifient, en guise d'ensemble, une catégorie. Par exemple on préfère définir la catégorie des groupes que la notion de groupe (ou que l'ensemble des groupes). Autrement dit, on considère que les morphismes font partie de la notion. Donc on doit savoir ce que sont les isomorphismes (ou équivalences ?) de catégorie.

## Conséquence

Du coup, "deux définitions équivalentes" deviennent "deux catégories équivalentes". Mais que sont les morphismes, isomorphismes, équivalences de catégorie ?

## Exercice

Proposez une définition simple de "catégories équivalentes".

# Plan du chapitre

# Les données d'un foncteur

### Un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est constitué par

- une application $F := F_{ob} : \mathrm{Ob}\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\mathcal{D}$
- pour chaque couple $(A, B)$ d'objets de $\mathcal{C}$ une application $F := F_{A,B} : \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to \hom_{\mathcal{D}}(FA, FB)$

vérifiant des conditions qu'on verra plus loin.

### Exercice

On considère l'ensemble $\mathbb{B}$ à deux éléments ($V$ et $F$) et la catégorie $\mathcal{C} := Ens/\mathbb{B}$, et puis la catégorie $\mathcal{D} := Ens \times Ens$ des couples d'ensembles. Définissez un (pré)foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ qui envoie $f : X \to \mathbb{B}$ vers le couple $(f^{-1}(V), f^{-1}(F))$.

# Les axiomes d'un foncteur

**Les données d'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vérifient les conditions suivantes**

- identités
- composition

**Exercice**

Vérifiez que le (pré)foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ vu plus haut (qui envoie $f : X \to \mathbb{B}$ vers le couple $(f^{-1}(V), f^{-1}(F)))$ est un foncteur.

# Foncteurs contravariants

**Un foncteur contravariant $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est constitué par**

- une application $F := F_{ob} : \mathrm{Ob}\mathcal{C} \to \mathrm{Ob}\mathcal{D}$
- pour chaque couple $(A, B)$ d'objets de $\mathcal{C}$ une application $F := F_{A,B} : \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(FB, FA)$

vérifiant les conditions que vous pensez.

**Exercice**

Quelles conditions pensez-vous ?

# Catégorie opposée

## Définition

Si $\mathcal{C}$ est une catégorie, on définit la catégorie opposée $\mathcal{C}^{opp}$ en posant $\mathrm{Ob}\mathcal{C}^{opp} := \mathrm{Ob}\mathcal{C}$ et pour $A, B$ dans $\mathrm{Ob}\mathcal{C}$, $\hom_{\mathcal{C}^{opp}} A\, B := \hom_{\mathcal{C}} B\, A$.

## Exercice

a) Montrez quel l'identité est un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}^{opp}$ et aussi de $\mathcal{C}^{opp}$ de $\mathcal{C}$.

b) Ces deux foncteurs sont-ils égaux ?

# Foncteurs contravariants et catégories opposées

**Exercice**

Expliquez en quel sens un foncteur (covariant) $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ "est" un foncteur contravariant de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}^{opp}$ "et vice-versa".

# Equivalences de catégories

## Définition

On dit que le foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence ssi

- essentiellement surjectif
- pleinement fidèle.

## Exemple

Le foncteur qui envoie $f : X \to \mathbb{B}$ vers le couple $(f^{-1}(V), f^{-1}(F))$ est une équivalence.

## Exercice

Ce foncteur est-il bijectif ?

# La composition des foncteurs

## Définition

Si $A, B, C$ sont trois catégories, et $F : A \to B$, $G : B \to C$, on définit le foncteur composé $G \circ F$ par

- sur les objets :
- sur les morphismes :

## Exercice

a) Que faut-il montrer à cet endroit ?
b) Montrez ça.

# La catégorie des catégories

## Les morphismes

On prend, comme morphismes les foncteurs entre deux catégories.

## La composition

On prend, comme composition de ces morphismes, la composition des foncteurs qu'on vient de définir.

## Exercice

a) Que faut-il montrer à cet endroit ?
b) Montrez-le.

# Retour sur les équivalences

**Exercice**

Montrez que foncteur qui envoie $f : X \to \mathbb{B}$ vers le couple $(f^{-1}(V), f^{-1}(F))$ n'est pas un isomorphisme.

**Exercice**

Montrez que le composé de deux équivalences entre catégories est une équivalence.

# Plan du chapitre

# A quoi bon ?

Des fois, on tombe sur des foncteurs qui se ressemblent. C'est qu'ils sont isomorphes dans une catégorie de foncteurs.

**Exercice**

On considère un ensemble $\mathbb{B}$, le foncteur $F : Ens \to Ens$ qui à $X$ associe $B \times X$ et celui, $G$ qui à $X$ associe $X \times B$.
a) Que faut-il faire à cet endroit ?
b) Faites-le !

Ces deux foncteurs se ressemblent sans être égaux. On va les relier par un isomorphisme de foncteurs.

# Les données d'une transformation naturelle

Soient $F$ et $G$ deux foncteurs de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{D}$.

**Une transformation naturelle $n : F \to G$ est constituée par**

- pour tout objet $A$ de $\mathcal{C}$ un morphisme $n_A$ de $FA$ vers $GA$.

vérifiant une condition qu'on verra plus loin.

**Exercice**

Définissez une (pré)transformation naturelle entre les foncteurs $F : Ens \to Ens$ qui à $X$ associe $B \times X$ et $G$, qui à $X$ associe $X \times B$.

# L'axiomes des transformations naturelles

**Les données d'une transformation naturelle $n : F \longrightarrow G$ vérifient la condition suivante**

- naturalité

**Exercice**

Vérifiez que la transformation donnée plus haut entre les foncteurs $F : Ens \longrightarrow Ens$ qui à $X$ associe $B \times X$ et $G$, qui à $X$ associe $X \times B$ est naturelle.

# La composition des transformations naturelles

## Définition

Si $A, B, C$ sont trois foncteurs (d'une catégorie $\mathcal{C}$ vers une catégorie $\mathcal{D}$) et $m : A \to B$, $n : B \to C$ sont deux transformations naturelles on définit la transformation naturelle composée $n \circ m$ par

- $(n \circ m) := c \mapsto n_c \circ m_c$.

## Exercice

a) Que faut-il montrer à cet endroit ?
b) Montrez ça.

# La catégorie des foncteurs de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$

**Les morphismes**

On prend, comme morphismes les transformations naturelles.

**La composition**

On prend, comme composition de ces morphismes, la composition des transformations naturelles qu'on vient de définir.

**Exercice**

a) Que faut-il montrer à cet endroit ?
b) Montrez-le.

# Equivalences fortes

## Définition

On dit qu'un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est une équivalence forte s'il existe $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tel que $F \circ G$ et $G \circ F$ soient isomorphes aux identités.

## Exercice

De quelles identités s'agit-il ?

## Exercice

Montrez que foncteur qui envoie $f : X \to \mathbb{B}$ vers le couple $(f^{-1}(V), f^{-1}(F))$ est une équivalence forte.

# Equivalences fortes et faibles

**Exercice**

Montrez qu'une équivalence forte entre foncteurs est aussi une équivalence.

**Problème**

Est-ce que toute équivalence entre foncteurs est forte ?

# Plan du chapitre

# Les données d'une monade

**Une monade $R$ sur la catégorie $\mathcal{C}$ est constituée par**

- un (endo)foncteur, encore noté $R$, $R : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$
- une transformation naturelle $\eta$ de l'identité $I$ vers $R$
- une transformation naturelle $\mu$ du composé $R \circ R$ vers $R$

vérifiant des conditions qu'on verra plus loin.

# Exemple I

## Exercice

On considère le foncteur $R : \mathit{Ens} \to \mathit{Ens}$ qui a l'ensemble $V$ (pensé comme un ensemble de variables) associe l'ensemble des formules (arbres) fabriquées avec les variables de $V$, les constantes 0 et 1, les opérations binaires $+$, $\times$ et l'opération unaire !.
Définissez précisément $R(V)$, $\eta$ et $\mu$.

# Exemple II

## Exercice

On pose $\mathcal{C} := Ens \times Ens$ et on fabrique la monade $R$ sur $\mathcal{C}$ qui à $(V, W)$ vu comme couple d'un ensemble $V$ de variables entières et d'un ensemble $W$ de variables booléennes, associe le couple de l'ensemble des formules de type entier et de celui des formules de type booléen formé avec les variables de $V$ et $W$, les constantes $0, 1; V, F$ et les opérations binaires $+, \times, et, ou$, les opérations unaire !, *non*, le prédicat *iszero*? et la construction *ifthenelse* (de type $bool \times nat \times nat \to nat$.
Définissez précisément $R(V, W)$, $\eta$ et $\mu$.

# Les axiomes d'une monade

Les données d'une monade $R : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ vérifient les conditions suivantes

- identités
- associativité

**Exercice**

Vérifiez que les deux exemples précédents sont bien des monades.

# Catégories des monades

**Exercice**

Définir une catégorie des monades sur une catégorie.

# Monades sur des catégories équivalentes

## Proposition

Si deux catégories sont isomorphes, leurs catégories de monades le sont aussi

## Problème

Si deux catégories sont équivalentes, en est-il de même pour leurs catégories de monades ? Pensez d'abord au cas des catégories $Ens/\mathbb{B}$ et $Ens \times Ens$.

# La composition des monades

**Problème**

Que faut-il pour faire de la composée de deux monades (sur une même catégorie) une nouvelle monade ?

# Plan du chapitre

# Les données d'un module

Etant donné une monade $R$ sur la catégorie $\mathcal{C}$

**Un module $M$ sur $R$ est constitué par**

- un foncteur, encore noté $M$, $M : \mathcal{C} \longrightarrow Ens$
- une transformation naturelle $\mu$ du composé $M \circ R$ vers $M$ appelée substitution du module

vérifiant des conditions qu'on verra plus loin.

# Exemple I

## Exercice

On considère la monade $R : Ens \to Ens$ qui a l'ensemble $V$ (pensé comme un ensemble de variables) associe l'ensemble des formules (arbres) fabriquées avec les variables de $V$, les constantes 0 et 1, les opérations binaires $+$, $\times$ et l'opération unaire !.
Le foncteur $R \times R$ qui à $V$ associe $R(V) \times R(V)$ est un module : donnez la formule pour son $\mu$.

# Exemple II

**Exercice**

On considère la monade $R$ de toute à l'heure sur la catégorie $\mathcal{C} := Ens \times Ens$. Le foncteur $M := p_1 \circ R$, où $p_1 : Ens \times Ens \longrightarrow Ens$ est la première projection, est un $R$-module.

a) C'est quoi, au juste, cette première projection ?

b) Donnez la substitution pour ce module.

# Les axiomes des modules

Les données d'un $R$-module $M : \mathcal{C} \longrightarrow \mathit{Ens}$ vérifient les conditions suivantes

- identités
- associativité

**Exercice**

Vérifiez que les deux exemples précédents sont bien des modules.

# Petite catégorie des modules

On prend comme morphismes entre deux $R$-modules les transformations naturelles qui commutent aux substitutions.

## Exercice

a) C'est quoi, cette condition de commutation ?
b) Montrez que ça fait bien une catégorie.

# Grande catégorie des modules

**Exercice**

On fixe une catégorie $\mathcal{C}$ et on prend comme objets les couples $(R, M)$ d'une monade $R$ sur $\mathcal{C}$ et d'un $R$-module $M$. Que peut-on prendre comme morphismes pour faire de ça une catégorie ?