La logique dominante

Dédou

Janvier 2010

Plan du chapitre

La logique et les mathématiciens

Si on demande à un vrai mathématicien :

Quelles sont les bases logiques des maths qu'il fait ?

Il répond invariablement

ZFC !

ZFC

ZF

C'est une **théorie du premier ordre** centenaire qu'on doit à Zermelo et Frankel.

ZFC

C'est la même avec un axiome de plus, **l'axiome du choix**.

Théories du premier ordre

Dans une théorie du premier ordre

il y a

- des objets (mathématiques)
- des énoncés qui parlent de ces objets.
- des **fonctions** pour les objets, qui fabriquent de nouveaux objets à partir d'anciens
- des **relations** qui fabriquent de nouveaux énoncés à partir d'objets
- des **axiomes** qui disent que certains objets vérifient certaines relations sous certaines hypothèses
- des **connecteurs** qui fabriquent de nouveaux énoncés à partir d'énoncés.
- des **règles d'inférence** qui disent que si certaines formules sont vraies, d'autres le sont aussi.

Exemple

L'arithmétique de Peano

il y a

- les objets se veulent être les entiers
- les fonctions sont par exemple $0, 1, +, \times$ (d'arités respectives $0, 0, 2, 2$)
- les relations sont par exemple $=, \leq$
- les connecteurs, y'a par exemple V, F, et, ou, non
- et à côté des connecteurs, y'a aussi les quantificateurs
- les axiomes et les règles d'inférence on verra plus tard, pour le moment on regarde la syntaxe.

Plan du chapitre

Le langage de Peano

La syntaxe de Peano, c'est une monade !

C'est la monade suivante P sur la catégorie $Ens \times Ens = Ens^2$.

- $P(V, W) := (P_i(V, W), P_o(V, W))$ où
- $P_i(V, W)$ est l'ensemble des formules de type entier qu'on peut écrire avec les fonctions de Peano et les variables de V (on ne peut rien faire avec celles de W)
- $P_o(V, W)$ est l'ensemble des énoncés qu'on peut écrire avec les relations de Peano, les connecteurs, les quantificateurs et les variables de V et de W
- Attention que les variables quantifiées sont de type entier.

Exercice

a) Que faut-il faire à cet endroit ?

b) Faites-le.

Des modules

Il y a des modules dans cette histoire :

- P_i et P_o sont des P-modules
- On peut faire des produits de P-modules, donc on a aussi par exemple P_i^2 ou $P_i \times P_o$

Exercice

- Expliquez mieux comment P_i et P_o sont des P-modules
- Expliquez mieux comment un produit de P-modules est un P-module.

Des morphismes de modules

Il y a aussi des morphismes de modules

Dans notre monade de Peano,

- $+$ et $\times$ peuvent être vus comme des morphismes de modules de P_i^2 vers P_i
- *et* et *ou* peuvent être vus comme des morphismes de modules de P_o^2 vers P_o
- *non* peut être vu comme un morphisme de modules de P_o vers P_o
- $=$ et $\leq$ peuvent être vus comme des morphismes de modules de P_i^2 vers P_o

Exercice

Comment voir $0, 1, V, F$ comme des morphismes de modules ?

Arités simples

Les premières arités dont on a besoin

Ce sont les éléments de $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \{i, o\}$. On écrira $i^a \times o^b \rightarrow o$ pour l'arité (a, b, o).

Exercice

Ecrire les arités des fonctions, des relations et des connecteurs de Peano.

Le module des quantificateurs

Pour $\forall$ par exemple, c'est plus compliqué :

La source de $\forall$

c'est le module $P_o^{*_i}$ défini par $P_o^{*_i}(V, W) := P_o(V^*, W)$ où on a posé $V^* := V \amalg \{V\}$ (obtenu à partir de V en lui ajoutant un élément).

Exercice

Montrez comment c'est un module.

α-conversion

Si on veut décrire les formules avec $\forall$,

la voie standard consiste à prendre les formules modulo α-conversion et à faire attention aux clashs de variables.

L'alternative modulaire,

ça consiste à dire que $\forall$ est un morphisme de module de $P_o^{*_i}$ vers P_o.

Arités (complexes)

Les dernières arités dont on a besoin

On va dire que l'arité de $\forall$ c'est $\partial_1 i^1 \times o^1 \to o$.

Exercice

a) Ecrivez d'autres arités du même genre.
b) Décrire un ensemble adéquat d'arités.

La signature de Peano

C'est

la famille des arités de toutes les constructions de Peano.

Exercice

Pourquoi la famille et pas l'ensemble ?

Partie fixe et partie spécifique

Dans la signature de Peano

- La partie fixe concerne les connecteurs et les quantificateurs
- la partie spécifique concerne les fonctions et les relations.

Spécification d'un langage du premier ordre

Pour spécifier un langage du premier ordre

on donne la partie spécifique de sa signature.

La partie fixe est toujours la même.

Exercice

Spécifier votre langage du premier ordre favori.

Exercice

Quelles sont les restrictions sur les arités de la partie spécifique ?

Plan du chapitre

Représentation d'une arité dans une monade

Dans la monade de Peano P

$\leq: P_i^2 \rightarrow P_o$ est une représentation de l'arité $i^2 \rightarrow o$.

Exercice

a) Définir une représentation d'une arité simple dans une monade quelconque sur Ens^2.
b) Même chose pour l'arité des quantificateurs.

Représentation d'une signature dans une monade

Une représentation de la signature $(a_i)_{i \in I}$ dans R

c'est une famille $(r_i)_{i \in I}$ où r_i est une représentation de a_i dans R.

Et maintenant ?

On a la monade de Peano, P et la signature de Peano, disons SP, et une représentation de SP dans P.

Ce qu'on veut, c'est

Trouver une propriété caractéristique de cette représentation qui exprime qu'elle est plus belle que les autres.

Ca va se faire dans la catégorie des représentations de SP.

La catégorie des représentations d'une signature S

- Les objets sont les couples (R, r) où R est une monade et r une représentation de S dans R.
- Un morphisme de (R, r) dans (R', r') est un morphisme de R dans R' compatible aux représentations
- La composition est la composition des morphismes de monades.

Exercice

a) Définir la catégorie des monades.
b) Que faut-il faire d'autre à cet endroit ?
c) Faites-le !

Initialité

Définition

Dans une catégorie $\mathcal{C}$, on dit que l'objet A est initial s'il y a exactement un morphisme de A dans tout autre (ou pas autre) objet de $\mathcal{C}$.

Exercice

Prouvez que l'ensemble vide est initial dans la catégorie des ensembles.

Sémantique initiale de Peano

La representation de Peano

est initiale dans la catégorie des representations de la signature SP.

Problème

Prouvez ça.

Sémantique initiale générique

Toute signature

admet une représentation initiale.

Problème

Prouvez ça.