

Introduction

Dédou

Janvier 2012

C'est quoi les maths ?

Faire des maths, en gros, c'est

- Formuler des énoncés
- Démontrer ces énoncés.

C'est quoi la logique ?

Le rôle de la logique, en gros, c'est étudier et expliquer

- comment on formule des énoncés
- et comment on fait une démonstration

La logique régit le langage mathématique,
un langage ultra-codifié pour parler du vrai et du faux.

Comme tous les langages,
ce langage est vivant, il n'est pas encore parfait, il évolue en
permanence.

La logique sert dans toutes les branches des maths
et même au-delà (physique, info, philo, droit).

C'est quoi ce cours ?

Ce cours est un cours de logique plutôt linéaire

On va y réviser la logique qu'on est censé connaître et y découvrir la logique linéaire, qui est la logique qui rend le mieux compte des deux grandes autre : la classique et l'intuitionniste..

Qu'est-ce qu'on prouve ?

La logique ne s'occupe pas
de l'existence de Dieu.

La logique ne s'occupe pas non plus
d'une théorie particulière (comme la théorie des ensembles par
exemple). Elle se veut au-dessus de ça. La théorie concernée est
cachée dans les "atomes" ou variables.

La logique ne s'occupe que
des constructions logiques : connecteurs et quantificateurs, qu'elle
discute avec soin. En particulier, la logique linéaire se distingue par
ses nouveaux connecteurs.

Comment est-ce qu'on prouve ?

La logique propose des règles impartiales

permettant, quand ça marche, de s'assurer qu'un énoncé est vrai ou faux.

Les mathématiciens et la plupart des scientifiques

acceptent le verdict de ces règles pour trancher leurs différents (scientifiques).

Grâce à ce consensus,

ils ne se mettent pas trop sur la gueule.

Comment font les autres scientifiques ?

Les autres scientifiques

veulent aussi utiliser au maximum la logique mathématique.

Comme leurs énoncés ne sont pas mathématiques,

ils remplacent les vraies questions
par des questions mathématiques analogues.

Une phase essentielle de leur activité consiste à

produire, dans le monde mathématique,
une copie aussi fidèle que possible du contexte qui les préoccupe.

C'est la phase de *modélisation*.

Les missions de la logique

Les missions de la logique sont donc

- identifier les *constructions* logiques qu'elle accepte de prendre en charge
- identifier les *règles* de déduction auxquelles elle donne son label
- autrement dit les discours qu'elle reconnaît comme preuves.

De quoi parlent les énoncés mathématiques ?

Les énoncés mathématiques parlent

d'objets mathématiques, qui peuvent être par exemple des nombres, des fonctions, des points de l'espace, des figures géométriques.

- des nombres,
- des fonctions,
- des points de l'espace,
- des figures géométriques.

Tout ça, la logique s'en fout.

Tout dépend du contexte

En maths comme ailleurs,

il y a toujours un *contexte* (mathématique), et ce contexte est décisif.

Ce qui est vrai dans un contexte peut être faux dans un autre.

Et pire, ce qui a du sens dans un contexte peut ne plus en avoir dans un autre.

Exemple

Si le contexte assure que n est un entier naturel, l'énoncé $\frac{5n}{n+9} \leq 3$ a du sens, tandis que si le contexte assure que n est un entier relatif, le même énoncé n'a plus de sens.

De quoi va-t-on parler ?

Dans ce cours on va donc parler

- du contexte
- des ensembles et de leurs éléments
- des énoncés
- et de leurs preuves.