

# Ensembles inductifs

Dédou

Septembre 2010

## Définition

Une arité (FO) est juste un entier naturel.

## Exemples

L'arité de l'addition est 2, l'arité de la factorielle est 1.

# Signatures

## Définition

Une signature (FO) est juste une famille d'arités.

## Exemple

(*plus* : 2, *mult* : 2, *fact* : 1) est une signature.

Tout ensemble peut être vu comme une signature  
celle où toutes les arités sont nulles.

## Réunion (disjointe de deux signatures)

Etant données deux signatures  $S$  et  $T$   
on peut former leur réunion disjointe  $S \amalg T$ .

# Réprésentation d'une signature dans un ensemble

une représentation  $r$  de la signature  $(I, a)$  dans l'ensemble  $R$   
est une famille  $(r_i)_{i \in I}$  avec  $r_i : R^{a_i} \rightarrow R$ .

## Exemple

Définir la représentation naturelle et une représentation débile de  
(*plus* : 2, *mult* : 2, *fact* : 1) dans  $\mathbb{R}$ .

# Morphismes de représentations

Soient  $(X, r)$  et  $(Y, s)$  deux représentations d'une signature  $S$

On appelle morphisme de  $r$  dans  $s$  toute application  $m : X \rightarrow Y$  compatible à  $r$  et  $s$ .

Exercice

Préciser cette définition.

# La catégorie des représentations d'une signature

Avec les morphismes définis avant,  
les représentations d'une signature forment une catégorie.

## Exercice

Préciser et démontrer cet énoncé.

# La représentation initiale

Etant donné une signature  $S$ ,  
l'ensemble des formules correspondantes constitue une  
représentation de  $S$  qu'on note  $\hat{S}$ .

## Exercice

Préciser et démontrer cet énoncé.

# La propriété d'initialité

Etant donné une signature  $S$ , et une représentation  $r$  de  $S$

Il existe un unique morphisme de  $\hat{S}$  dans  $r$ .

Exercice

Démontrer cet énoncé.

# Notion d'objet initial

On dit que l'objet  $I$  de la catégorie  $C$  est initial si il existe un unique morphisme de  $I$  vers tout objet de  $C$ .

## Exemple

Pour toute signature  $S$ ,  $\hat{S}$  est un objet initial dans la catégorie des représentations de  $S$ .

## Exercice

Si deux objets d'une catégorie sont initiaux, ils sont isomorphes, et ce de façon unique.

## Ce qu'on a gagné

On a remplacé une définition ad hoc (avec les arbres)  
par une propriété “universelle” (caractéristique).

# Exercice

Faire la variante typée.

# Le problème de l'ordre supérieur

On veut ajouter à la syntaxe des constructions avec liaisons, dont l'arité est plus complexe.

On va généraliser la théorie précédente.