Les exponentielles

Dédou

Janvier 2012

Le VRAI classique MALL

Dans *MALL*

- on veut que le “vrai” OU soit $\parr$, pour le tiers-exclu
- mais on ne gagne pas avec $1 \parr 1$
- c’est pas grave puisqu’ on gagne avec $\top \parr \top$
- on n’a qu’à dire que $\top$ est le VRAI “classique”
- et laisser 1 à ceux qui savent faire quelque chose avec.

Exercice

a) Donnez un sens à l’affirmation suivante :
pour les formules de MALL sans variable ni 1 ni $\perp$ il n’y a pas de différence entre les connecteurs additifs et les multiplicatifs.
b) Prouvez votre énoncé.

Les tautologies classiques et MALL

Mais dans MALL

on n'a pas (pour toute formule A)

$$A \parr A \vdash A.$$

Exercice

a) Précisez et prouvez cette affirmation.
b) Donnez une autre tautologie classique qui n'est pas vraie dans MALL.

Parenthèse

L'implication linéaire,

c'est le connecteur

$$\multimap := (A, B) \mapsto \overline{A} \parr B.$$

Exercice

a) Définir deux "équivalences linéaires".
b) Dire en quel sens elles ne sont pas équivalentes.
c) Est-ce que l'une implique linéairement l'autre ?

Le problème

Objectif

Identifier dans MALL ou générer dans une extension de MALL une classe de formules “classiques” qui vérifient au moins les tautologies classiques.

La solution

On ajoute un connecteur unaire ! avec l'idée que l'hypothèse $!H$ c'est l'hypothèse H disponible autant de fois qu'on veut.

Slogan

La logique linéaire décompose l'implication (classique) en termes de connecteurs plus élémentaires :

$$A \Rightarrow B \quad \equiv \quad !A \multimap B.$$

Les règles gauches

Les trois règles gauches pour !

exprimant que l'hypothèse $!H$ est duplicable et donne H zéro ou une fois.

L'affaiblissement

La règle d'affaiblissement dit qu'on peut s'affranchir de $!H$

on peut s'affranchir de l'hypothèse $!H$:

$$\frac{\vdash \Gamma}{!H \vdash \Gamma}$$

ce qu'on peut écrire de façon plus neutre :

$$\frac{1 \vdash \Gamma}{!H \vdash \Gamma}$$

La déréliction

La règle de déréliction dit qu'

on peut remplacer l'hypothèse $!H$ par H :

$$\frac{H \vdash \Gamma}{!H \vdash \Gamma}$$

La contraction

La règle de contraction dit qu'

on peut dupliquer l'hypothèse $!H$:

$$\frac{!H, !H \vdash \Gamma}{!H \vdash \Gamma}$$

ce qu'on peut écrire de façon plus neutre :

$$\frac{!H \otimes !H \vdash \Gamma}{!H \vdash \Gamma}$$

Conclusion virtuelle

On voudrait conclure

$!H$ est négatif, et c'est sa négation (linéaire) $?K$ qui se réécrit en $\perp$ ou K ou $?K \parr ?K$.

Mais big problème

la règle droite devrait être

$$\frac{\Gamma \vdash 1 \qquad \Gamma \vdash H \qquad \Gamma \vdash !H \otimes !H}{\Gamma \vdash !H}$$

$!H \otimes !H$ est plus gros que $!H$ et
ce qui donne lieu à des preuves infinies, et ça, ça craint grave.
Il faut trouver autre chose

La promotion

La règle de promotion dit que

pour valider $!H$, puisque ça veut dire valider une infinité de fois H, il faut, en gros, n'avoir que des hypothèses "inusables", et si c'est le cas, si on sait prouver H une fois, on sait le faire autant de fois qu'on veut, d'où la vraie règle droite :

$$\frac{!\Gamma \vdash H}{!\Gamma \vdash !H}$$

Problème

Il reste à

faire un jeu avec tout ça.