# Enoncés

Dédou

Janvier 2012

# Enoncés et booléens

**Les énoncés (classiques) sont**

les formules pour les booléens.

Il y a deux booléens et une infinité d'énoncés.

**L'ensemble de tous les énoncés**

est noté *Prop* (au lieu d' "énoncé", on dit parfois "proposition").

# Exemples

**$V$ and $F$ et $V \Rightarrow F$**

sont deux énoncés différents, qui “sont” faux tous les deux.

**Une différence :**

$V \Rightarrow F$ a une réciproque, qui est $F \Rightarrow V$, tandis que $V$ and $F$ n'a pas de réciproque.

**Exo**

Donnez deux énoncés différents et qui sont tous les deux vrais.

# Comment définir les énoncés ?

**On va définir les énoncés en donnant**

- une liste d'énoncés de base
- une liste de constructions pour formuler de nouveaux énoncés à partir d'anciens.

**Ca nous rappelle les fonctions qu'on rencontre :**

- y'a les fonctions de base, sinus, cosinus, logarithme, exponentielle, et les puissances ;
- y'a les sommes, produits, quotients, composées.

# Les énoncés de base

## Voici nos énoncés de base

- $V$ et $F$ sont des énoncés
- les atomes sont des énoncés.
- les négations d'atomes sont des énoncés.

# Les connecteurs

**Si $A$ et $B$ sont deux énoncés, il en est de même pour :**

- $A$ and $B$
- $A$ or $B$.

**Exemple**

$1 = 3$ or $V = F$ est un énoncé.

**L'implication**

sera **définie** plus loin (après la négation) par

$$\Rightarrow := (A, B) \mapsto \overline{A} \text{ or } B.$$

**Exo**

Donnez une définition des énoncés avec la négation l'implication. En quel sens ces deux définitions sont-elles équivalentes ? Broder.

# Le type des connecteurs

**Nos connecteurs ont donc les types suivants :**

- and : $Prop \times Prop \to Prop$
- or : $Prop \times Prop \to Prop$
- $\Rightarrow$: $Prop \times Prop \to Prop$.

# Les quantificateurs

**Le truc sérieux pour faire des énoncés, c'est**

les quantificateurs.

**En première approximation**

il y a deux quantificateurs ; $\forall$ ("pour tout") et $\exists$ ("il existe").

# Les quantificateurs universels dans la vraie vie

**Le quantificateur universel, c'est**

quelque soit, alias pour tout, alias $\forall$. On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur universel est un énoncé universel.

**Dans la vraie vie**

il y a plutôt un quantificateur universel par ensemble.
On note très provisoirement $\forall_E$ le quantificateur universel pour l'ensemble $E$.
On a donc par exemple un quantificateur $\forall_{\mathbb{R}}$ et un autre $\forall_{\mathbb{B}}$.

# Les quantificateurs universels en logique

**Dans une théorie, comme celle des ensembles,**

il y a un quantificateur universel “du premier ordre”, qui quantifie sur les ensembles, comme dans

$$\exists x, \forall y, y \notin y$$

qui exprime qu'il existe un ensemble vide.

**Exo**

Ecrire un énoncé pour l'unicité de l'ensemble vide.

**Dans une théorie, comme celle des ensembles,**

il y a un quantificateur universel “du second ordre”, qui quantifie sur les énoncés, comme dans

$$\exists P, P \Rightarrow P$$

qui exprime que tout énoncé s'implique lui-même

# Quantification et liaison

**Dans $\forall x : \mathbb{R}, P(x)$**

la variable $x$ est liée.

**Exemple**

$$\forall x : \mathbb{R}, x \leq 0 \text{ or } 0 \leq x$$

et

$$\forall y : \mathbb{R}, y \leq 0 \text{ or } 0 \leq y$$

sont deux énoncés égaux.

# Intermède : Egalité d'énoncés

**Il est important de distinguer les variables liées des variables libres**

mais il n'est jamais important de savoir si deux énoncés sont égaux.
Ce qui peut être important,
c'est de savoir si deux énoncés sont **équivalents**.

# Le sens de la quantification universelle

## Exemple

Quand on dit "pour tout entier $n$, $n^3 + 3n^2 + 2n$ est divisible par 6", on veut dire que tous les énoncés suivants sont vrais :

- (pour $n = 0$ :) 0 est divisible par 6
- (pour $n = 1$ :) 6 est divisible par 6
- (pour $n = 2$ :) 18 est divisible par 6
- etc

## Un énoncé universel

peut donc condenser une infinité d'énoncés plus simples.

Mais ce n'est pas si simple que ça.

# Les quantificateurs existentiels

**Le quantificateur existentiel, c'est**

il existe, alias $\exists$. On dit qu'un énoncé qui commence par un quantificateur existentiel est un énoncé existentiel. Comme pour les universels, dans la vraie vie, il y a plutôt un quantificateur existentiel par ensemble.
On note très provisoirement $\exists_E$ le quantificateur existentiel pour l'ensemble $E$.

# Quantification existentielle et liaison

**Dans $\exists x : E, P(x)$**

la variable $x$ est liée.
Les énoncés

$$\exists x : E, P(x)$$

et

$$\exists y : E, P(y)$$

sont égaux
(mais on s'en fout).

# Le sens de la quantification existentielle

## Exemple

Quand on dit

“il existe un entier $n$ vérifiant $(n+2)^{1000} \leq 2^n$”,

on veut dire qu'au moins un des énoncés suivants est vrai :

- (pour $n = 0$ :) $2^{1000} \leq 1$
- (pour $n = 1$ :) $3^{1000} \leq 2$
- (pour $n = 2$ :) $4^{1000} \leq 4$
- (pour $n = 3$ :) $5^{1000} \leq 8$
- etc

Dans un tel exemple, on saurait trouver un entier $n$ explicite ayant cette propriété, par exemple $n := 10^6$, mais on se fiche de la valeur exacte, et on préfère la désigner par un nom court.

# Bilan

### Tous les énoncés s'obtiennent

- à partir des énoncés de base
- avec des connecteurs binaires (ou unaires)
- et/ou des quantificateurs.

### Ce n'est pas tout-à-fait vrai dans la vraie vie

à cause des définitions, dont on va parler bientôt.
Ce qui est vrai, c'est qu'un énoncé **explicite** est de l'une des formes indiquées plus haut.
Un énoncé explicite est un énoncé qui ne sollicite aucune définition.
Tout énoncé est équivalent (égal ?) à un énoncé explicite, qui s'obtient en remplaçant tous les noms par leur valeur.

# Empilement de quantificateurs

## On peut enchainer les quantificateurs, exemples :

- $\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x > y$ or $x^3 \leq y^3$
- (qu'on peut raccourcir en $\forall x, y : \mathbb{R}, x > y$ or $x^3 \leq y^3$)
- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$.

## Quand on enchaine plusieurs quantificateurs

si on permute un $\forall$ et un $\exists$, ça risque de changer le sens.

## Exemple

- $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, e^x \leq M$ est faux tandis que
- $\forall x : \mathbb{R}, \exists M : \mathbb{R}, e^x \leq M$ est vrai (prendre $M := e^x$).

## En revanche on peut permuter deux $\forall$ ou deux $\exists$

$\forall x : \mathbb{R}, \forall y : \mathbb{R}, x > y$ or $x^3 \leq y^3$ et
$\forall y : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, x > y$ or $x^3 \leq y^3$ sont équivalents.

# Langage naturel et langage formel

**On est habitués aux énoncés en langage naturel**

Il faut savoir les traduire en langage formel.

# Exemples

## Exemples

- pour $n$ suffisamment grand, $u_n$ est positif
- $f$ garde un signe fixe sur $I$
- tout entier est somme de quatre carrés
- $u_n$ tend vers 297 quand $n$ tend vers l'infini
- $f$ respecte les combinaisons linéaires.

# La négation

**On a une négation pour les énoncés**

dont voici la carte de visite

$$\begin{array}{rccc} non: & Prop & \to & Prop \\ & P & \mapsto & \overline{P} \end{array}$$

# Le calcul de la négation

**la négation d'un énoncé s'obtient en appliquant les règles suivantes**

- $\overline{V} = F, \quad \overline{F} = V, \quad \overline{A} = \overline{A}..., \quad \overline{\overline{A}} = A.$
- $\overline{P \text{ and } Q} = \overline{P} \text{ or } \overline{Q} \qquad \overline{P \text{ or } Q} = \overline{P} \text{ and } \overline{Q}$
- $\overline{\forall x, P(x)} = \exists x, \overline{P(x)}, \quad \overline{\exists x, P(x)} = \forall x, \overline{P(x)}.$

**Exemple**

La négation de $\exists M : \mathbb{R}, \forall x : \mathbb{R}, f(x) \leq M$

est $\forall M : \mathbb{R}, \exists x : \mathbb{R}, M < f(x).$

**Exo**

Calculer la négation de $\forall x, y : \mathbb{R}, y < x \text{ or } f(x) \leq f(y).$

# L'implication et sa négation

## Définition

Voici la carte de visite de l'implication

$$\begin{array}{rccc} \Rightarrow: & Prop \times Prop & \to & Prop \\ & (P, Q) & \mapsto & \overline{P} \text{ or } Q \end{array}$$

## Attention

La négation de l'implication est un peu bizarre :

$$\overline{P \Rightarrow Q} = P \text{ and } \overline{Q}.$$

## Exo

Calculer la négation de $\forall x, y : \mathbb{R}, x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.

# L'équivalence et sa négation

## Définition

Voici la carte de visite de l'équivalence

$$\begin{array}{rccl} \Leftrightarrow: & Prop \times Prop & \to & Prop \\ & (P, Q) & \mapsto & (P \Rightarrow Q) \text{ and } (Q \Rightarrow P) \end{array}$$

## Attention

La négation de l'équivalence est très bizarre :

$$\overline{P \Leftrightarrow Q} = (P \text{ and } \overline{Q}) \text{ or } (Q \text{ and } \overline{P}).$$

## Exo

Calculer la négation de $\forall x, y : \mathbb{R}, x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y)$.
Donnez votre formulation littéraire de cette négation.