Séquents classiques

Dédou

Janvier 2012

On repart à zéro

On a vu d'où sortent les séquents

et ce qu'on gagne à les voir d'un seul côté.

Maintenant on déroule

la présentation correspondante.

Que prouve-t-on ?

Un séquent, c'est une suite finie de formules classiques

dans un environnement d'atomes logiques et de variables objet.

Pour prouver un séquent

on dispose d'un jeu de règles dites d'inférence, qu'on va revisiter.

La règle structurelle d'échange

Echange

$$\frac{\vdash \Gamma, A, B, \Delta}{\vdash \Gamma, B, A, \Delta}$$

On peut changer l'ordre des formules. Cette régle permet surtout de formuler les autres règles en mettant la formule active au bout.

Exo

Formaliser la règle d'échange.

La règle structurelle d'affaiblissement

Affaiblissement

$$(W)\ \frac{\vdash \Gamma}{\vdash \Gamma, A}$$

On peut oublier une hypothèse. Cette régle permet surtout de simplifier la règle d'identité.

La règle structurelle de contraction

Contraction

$$(C)\,\frac{\vdash \Gamma, A, A}{\vdash \Gamma, A}$$

On peut dupliquer une hypothèse. Cette règle permet surtout de simplifier la règle d'introduction de $\exists$.
Les règles W et C sont celles que LL revisite le plus.

La règle logique de conjonction

Conjonction

$$(\wedge)\,\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \wedge B}$$

Pour démontrer $A \wedge B$, on démontre A et on démontre B (dans le même contexte).
Autrement dit : si sous certaines hypothèses on sait démontrer A et on sait démontrer B alors, sous les mêmes hypothèses, on sait démontrer $A \wedge B$.

La règle logique de conjonction : variante

Conjonction

$$(\wedge')\,\frac{\vdash \Gamma, A \qquad \vdash \Delta, B}{\vdash \Gamma, \Delta, A \wedge B}$$

Si on sait démontrer A sous certaines hypothèses et B sous d'autres, alors on sait démontrer $A \wedge B$ avec les hypothèses qu'il faut pour prouver A et celles qu'il faut pour prouver B.

Exo

En quel sens les deux règles sont-elles équivalentes ?

Les règles logiques de disjonction

Disjonction

$$(\vee_g)\,\frac{\vdash \Gamma, A}{\vdash \Gamma, A \vee B} \quad (\vee_d)\,\frac{\vdash \Gamma, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}$$

Pour démontrer $A \vee B$, on démontre A ou on démontre B (dans le même contexte).

Les règles logiques de disjonction : variante

Disjonction : variante

$$(\vee')\ \frac{\vdash \Gamma, A, B}{\vdash \Gamma, A \vee B}$$

Pour démontrer $A \wedge B$, on démontre A en supposant B (ou l'inverse ce qui revient au même).

Exo

En quel sens les deux règles sont-elles équivalentes ?

Les règles logiques de quantification

Quantification universelle

$$(\forall)\ \frac{\vdash \Gamma, A(x)}{\vdash \Gamma, \forall x\, A(x)}$$

La variable x n'apparaît pas dans Γ.

Quantification existentielle

$$(\exists)\ \frac{\vdash \Gamma, A(t)}{\vdash \Gamma, \exists x\, A(x)}$$

La variable x n'apparaît pas dans Γ.

La règle logique d'identité

Identité

$$(Id) \qquad \frac{}{\vdash A, \overline{A}}$$

Identité : variante

$$(Id') \qquad \frac{}{\vdash \Gamma, A, \overline{A}}$$

Identité : variante

$$(Id'') \qquad \frac{}{\vdash a, \overline{a}} \qquad (a \text{ est un atome})$$

Immersion

Exo

Peut-on faire l'économie de la règle d'échange, en "laissant la formule active au milieu du séquent, comme dans :

$$(\frac{\vdash \Gamma, A, \Delta}{\vdash \Gamma, A \vee B, \Delta}$$

Séquents bilatères

Maintenant qu'on a compris ce qu'on peut gagner à mettre toutes les formules à droite des séquents, essayons de regagner un peu de ce qu'on a perdu (en termes de lisibilité).

On convient de représenter le séquent monolatère

$$\vdash \Gamma, \Delta$$

par le séquent bilatère

$$\overline{\Gamma} \vdash \Delta.$$

Les règles écrites pour les séquents monolatères se transcrivent pour les séquents bilatères.

Exo

Ecrire les transcriptions de la règle $(Conj)$.

Focussing

Les séquents bilatères permettent de mettre en exergue (seule de son côté) la formule active.

A gauche, elle apparaît comme une hypothèse comme dans :

$$\frac{A, B \vdash \Gamma}{A \wedge B \vdash \Gamma}$$

qui s'exprime en disant " dans une preuve, on peut remplacer une hypothèse de la forme $A \wedge B$ par les deux hypothèses A et B".

A droite, elle apparaît comme une conclusion comme dans :

$$\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}$$

qui s'exprime en disant " dans une preuve, on peut remplacer la conclusion $A \vee B$ par A (par exemple)".

la règle cut

La règle cut se voit bien du point de vue bilatère :

$$(Cut)\ \frac{\Gamma \vdash A \qquad A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \Delta}$$