Mon premier jeu logique

Dédou

Janvier 2012

Graphes bipartites marqués

Pour jouer (à deux), il suffit d'avoir

- deux ensembles disjoints P_M et P_T "des positions" (un pour chaque joueur, Moi et Toi)
- un ensemble $C_M \subset P_M \times P_T$ des "coups de Moi"
- un ensemble $C_T \subset P_T \times P_M$ des "coups de Toi"
- une position "initiale" O qu'on préfère prendre dans P_T.

Un truc comme ça s'appelle un graphe (position = sommet, coup = arc) bipartite (les arcs passent d'un côté à l'autre) marqué (à cause de la position spéciale).

Exemple

Le morpion.

Exo

Préciser ce jeu.

Les positions gagnées

Dans un jeu

on a les positions perdues, celles où le joueur qui doit jouer n'a pas de coup. Et les positions gagnées (pour un joueur) sont les positions perdues pour l'autre.

Les parties

Quand on a un jeu

on a aussi l'ensemble des parties de ce jeu : chemins dans le graphe commençant là où il faut. Il y a toujours la partie vide.

Le perdant d'une partie

c'est le joueur qui devrait jouer pour continuer la partie. Et le gagnant, c'est l'autre.

Les stratégies

Quand on a un jeu

une stratégie pour Moi est un ensemble de parties de longueur paire stable par préfixe (pair) et contenant la partie vide.

Exo

Définir la notion de stratégie pour Toi.

Exo

Indiquer trois stratégies pour le morpion.

Stratégies gagnantes

Une stratégie σ pour Moi est gagnante

si toute suite croissante de parties dedans est stationnaire ("pas de parties infinies") et si toute partie impaire dont les préfixes sont dans σ est préfixe d'une partie de σ.

Autrement dit, Moi a réponse à tout, et ne se laisse pas embarquer dans des parties infinies.

Exercice

a) Définir la notion de stratégie gagnante pour Toi.
b) Démontrez que dans un jeu quelconque, il ne peut y avoir de stratégie gagnante à la fois pour Moi et pour Toi.

Les formules additives

L'ensemble inductif *ALL* des formules additives

est défini par la grammaire :

$$ALL := x|\overline{x}|\top|0|ALL \oplus ALL|ALL \& ALL.$$

Exercice

Ecrivez une formule impliquant tous les constructeurs.

La négation

La négation $A \mapsto \overline{A} : ALL \to ALL$ est définie par

- x et $\overline{x}$ sont la négation l'un de l'autre
- $\top$ et 0 sont la négation l'un de l'autre
- $\overline{A \oplus B} = \overline{A} \& \overline{B}$
- $\overline{A \& B} = \overline{A} \oplus \overline{B}$

Exercice

Calculez la négation de $(\top \oplus \top)\&(0\&\top)$.

Les positions

L'ensemble des positions de ce jeu est

$$\{Moi, Toi\} \times ALL.$$

Moi essaie de prouver sa formule et Toi essaie de prouver la sienne.

Les coups

- Face à 0, chaque joueur a perdu
- face à $\top$, chaque joueur peut "passer" 0 à l'autre et lui dire "tu as perdu"
- face à $F := A \oplus B$, chaque joueur peut passer $\overline{A}$ à l'autre en disant : "je choisis de prouver A"
- face à $F := A \oplus B$, chaque joueur peut passer $\overline{B}$ à l'autre en disant : "je choisis de prouver B"
- face à $F := A \& B$, chaque joueur peut passer $\overline{F}$ à l'autre en disant "veux-tu que je prouve A ou B ?"

Chaque joueur "voit" la formule qu'il veut prouver.

Exercice

Formulez les coups pour un jeu où Moi et Toi "voient la même formule" que Moi veut prouver et Toi veut réfuter.

La finitude

A chaque coup

la formule est transformée en une de ses sous-formules (au signe près).
La longueur des parties est bornée par la taille de la formule initiale.
Toutes les parties ont un vainqueur.

Exercice

Prouver tout ça.

Tiers-exclu ?

Dans un jeu où la longueur des parties est bornées

l'un des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Exercice

Démontrez ça.

Exercice

Peut-on gagner $F \oplus \overline{F}$ pour tout F ?.

Qui commence ?

On se fout de qui commence :

les deux positions (Moi, A) et $(Toi, \overline{A})$ ont essentiellement le même avenir parce que l'un des deux joueurs ne peut que passer la main à l'autre.

Evaluation

On peut définir une fonction

$eval : ALL \to \mathbb{B}$ qui vaut V sur les formules "vraies" et 0 sur les autres, qui sont leurs négations.

Preuves

On peut définir l'ensemble des preuves d'une formule

- *wintop* est une preuve de $\top$
- si p est une preuve de A et q une preuve de B, $and(p, q)$ est une preuve de $A \& B$
- si p est une preuve de A, $or_1(p)$ est une preuve de $A \oplus B$
- si q est une preuve de B, $or_2(q)$ est une preuve de $A \oplus B$.

Exercice

Ecrivez deux preuves de $A \oplus \overline{A}$ avec $A := (\top \& \top) \oplus (0 \oplus \top)$.

Adéquation

A toute preuve d'une formule A

on peut associer une stratégie gagnante pour A :

- à *wintop* on associe la stratégie pour $\top$ qui passe la main
- à $and(p, q)$, on associe la stratégie pour $A\&B$ qui applique la stratégie associée à p si Toi choisit A, et celle associée à q si Toi choisit B
- à $or_1(p)$, on associe la stratégie pour $A \oplus B$ qui choisit A puis applique la stratégie associée à p
- à $or_2(q)$, on associe la stratégie pour $A \oplus B$ qui choisit B puis applique la stratégie associée à q.

Pleine complétude

Exercice

Montrez que l'application précédente est bijective.