Equivalence

Dédou

Avril 2012

Définition de l'équivalence

Définition

On dit que, quand x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ (ou $f(x)$ est équivalent à $g(x)$) si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On peut noter ça

$$f(x) \sim_{x \to a} g(x),$$

ou, en sous-entendant a,

$$f \sim g.$$

L'exemple-phare

Proposition

Pour f dérivable en a avec $f'(a)$ non nul, on a

$$f(x) - f(a) \sim_{x \to a} f'(a)(x-a).$$

Exemple

$$\sin x \sim_{x \to 0} x.$$

Exo 1

Donnez un équivalent simple de $\ln x - \ln 2$ quand x tend vers 2.

Warning

Dans les mêmes conditions, a-t-on

$$f(x) \sim_{x \to a} f(a) + f'(a)(x-a)?$$

Oui mais c'est débile, ça ne porte pas le sens qu'on pourrait croire, ce n'est pas plus vrai que

$$f(x) \sim_{x \to a} f(a) + 3f'(a)(x-a)$$

(sauf si $f(a) = 0$).

Equivalence et Taylor

Proposition

Pour f indéfiniment dérivable en a, quand x tend vers a,
a) $f(x)$ est équivalent au premier terme non nul de sa série de Taylor en a ;
b) en particulier, avec la notation évidente, $f(x) - T_n(x)$ est équivalent au premier terme non nul du reste de la série de Taylor.

Exemple

$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim_{x \to 0} \frac{x^3}{6}$.

Exo 2

Donnez un équivalent simple, pour x tendant vers 0 de $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.