Approximation linéaire

Dédou

Février 2012

La tangente

Les braves fonctions ont une tangente en chaque point de leur graphe (et ça se dessine).

Le slogan, c'est

"Au voisinage d'un point, on approche la fonction par sa tangente en ce point".

Il vaut donc mieux savoir calculer cette tangente. Cette tangente est une fonction affine, ou plutôt une droite (son graphe).

La même sans les abus

Dans la page précédente,

on a mélangé le langage des fonctions et celui des graphes.

Il vaudrait mieux dire :

Les graphes des braves fonctions ont une tangente en tout point

que

Les braves fonctions ont une tangente en chaque point.

Mais ça conduit à dire

Au voisinage d'un point, on approche la fonction par la fonction affine dont le graphe est tangent à celui de f en ce point

qui est bien plus lourd que

Au voisinage d'un point, on approche la fonction par sa tangente en ce point.

Tangente et linéarisée

Pour éviter la confusion entre la fonction affine et son graphe

on donne un nom à la fonction dont la tangente est le graphe.

Pour f dérivable en a, on appelle *linéarisée* de f en a

la fonction dont le graphe est la tangente au graphe de f en a (plus exactement en $(a, f(a))$).

On veut donc savoir calculer

la tangente et la linéarisée.

Le calcul de la tangente

La tangente en a au graphe de la fonction dérivable f a pour équation

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Exemple :

la tangente en 3 au graphe de la fonction $x \mapsto x^2$ est la droite déquation $y = 6x - 9$.

Exo 3.1

Calculez la tangente en 4 au graphe de la fonction $x \mapsto 2x^3 + 1$.

Le calcul de la linéarisée

La linéarisée en a de la fonction dérivable f est la fonction

$$x \mapsto f(a) + (x-a)f'(a).$$

Exemple :

la linéarisée en 3 de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est la fonction $x \mapsto 6x - 8$.

Exo 3.2

Calculez la linéarisée en 4 de la fonction $x \mapsto 2x^3 + 3$.

Comment font les physiciens ?

L'approximation linéaire des physiciens

c'est la pseudo-formule :

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h.$$

qui dit que si on ne connait pas $f(a+h)$ et si h est petit, "on peut" essayer de mettre $f(a) + f'(a)h$ à la place.

Nous, on va dire que

Le nombre $f(a) + f'(a)h$ est une approximation linéaire du nombre $f(a+h)$.
Cette approximation est d'autant moins illégitime que h est petit.

L'approximation linéaire des nombres : exemple

Faire une approximation linéaire d'un nombre, c'est

- choisir (ou comprendre) qui sont f et a (et du coup h),
- calculer $f(a)$, h et $f'(a)$
- "proposer" $f(a) + hf'(a)$ comme approximation de $f(a+h)$.

Exemple

Si on veut une approximation du nombre $\sin 3$ on peut prendre

- $f := \sin$
- $a := \pi$
  (π est le nombre le plus proche de 3 dont le sinus est connu)
- $h := 3 - \pi$ (pour avoir $a + h = 3$).

On trouve alors $f(a) = \sin \pi = 0$ et $f'(a) = \cos \pi = -1$
ce qui donne

$\pi - 3$ comme approximation linéaire de $\sin 3$.

L'approximation linéaire des nombres : exercice

Faire une approximation linéaire d'un nombre, c'est donc

- choisir (ou comprendre) qui sont f et a (et du coup h),
- calculer $f(a)$, h et $f'(a)$
- "proposer" $f(a) + hf'(a)$ comme approximation de $f(a + h)$.

Exo 3.3

Choisissez f, a et h pour une approximation linéaire de $\cos 6$.
Quelle est l'approximation correspondante ?

Approximation linéaire et tangente

Il faut bien voir que la pseudo-formule

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h$$

s'obtient à partir de

$$f(x) \sim f(a) + f'(a)(x-a)$$

en y remplaçant x par $a+h$.
Sur la deuxième pseudo-formule, on "voit" la linéarisée.

Tout ça se dessine

Pour bien comprendre l'approximation linéaire, il faut faire un dessin où apparaissent, en plus de la courbe et sa tangente, a et $a+h$ en abscisse, et $f(a)$, $f(a+h)$ et $f(a)+f'(a)h$ en ordonnée.

Exo 3.4

Dessinez votre approximation linéaire de $\cos 6$.

Le sens de $\sim$

Les mathématiciens attribuent bien un sens à $\sim$ (qu'on découvrira bientôt), mais qui ne couvre pas l'utilisation qu'en font les physiciens dans leur formule

$$f(a+h) \sim f(a) + f'(a)h,$$

qui signifie quelque chose comme : "Le membre de droite est une bonne approximation de celui de gauche".
Ce qui a éventuellement un sens précis pour les mathématiciens, c'est

$$f(a+h) - f(a) \sim f'(a)h.$$

La différence essentielle avec la formule précédente est que, cette fois, les deux membres tendent vers 0 avec h.

Les approximations linéaires standard

Ce sont les cinq formules :

$$\cos h \sim 1, \quad \sin h \sim h, \quad \ln(1+h) \sim h, \quad e^h \sim 1+h, \quad (1+h)^\alpha \sim 1+\alpha h.$$

On rappelle que ces formules n'ont pas de sens précis et qu'il vaut donc mieux ne pas en parler en public.
Plus tard, on donnera des variantes légales de ces formules.

Approximation linéaire et combinaisons linéaires

L'approximation linéaire fait très bon ménage avec l'addition et la multiplication par un nombre, autrement dit avec les combinaisons linéaires. Par exemple, comme on a

$$\sin h \sim h$$

$$\ln(e+h) \sim 1 + h/e$$

si on multiplie la première formule par 3 et la seconde par e et qu'on les "ajoute", on obtient la pseudo-formule

$$3\sin h - e\ln(e+h) \sim 3h - e(1+h/e) = -e + 2h$$

qui est bien celle que donne la formule des physiciens.

Approximation linéaire et produit

Pour le produit, ça se passe encore pas trop mal, à condition de négliger les termes en h^2 :

$$e^h \sim 1 + h$$

et

$$(1+h)^3 \sim 1 + 3h$$

conduisent, par multiplication, à

$$e^h(1+h)^3 \sim (1+h)(1+3h) \sim 1 + 4h.$$

On comprendra ça mieux plus tard.

Approximation linéaire et composition

L'approximation linéaire fait très bon ménage avec la composition. Par exemple pour approcher $e^{\sin 3}$, on prend f, a et h comme plus haut, et on peut enchaîner les calculs "comme les physiciens". On a

$$e^{\sin 3} \sim e^{-h} \quad (\text{"puisque"} \quad \sin 3 \sim -h)$$

et

$$e^{\sin 3} \sim 1 - h \quad (\text{"puisque"} \quad e^{-h} \sim 1 - h)$$

autrement dit :

$$e^{\sin 3} \sim \pi - 2.$$

On trouverait le même résultat en calculant la dérivée (laquelle ?).