Image des intervalles

Dédou

Mars 2012

Exemples d'images

- L'image de $[2,3]$ par la fonction carré est $[4,9]$
- L'image de $]-2,3[$ par la fonction carré est $[0,9[$.

Exo 1

Quelle est l'image de $[-2,1[$ par la fonction $x \mapsto 1+x^4$?

Définition de l'image

Définition

Soit f une fonction et I une partie de DDf.
L'image de I par f, notée $f(I)$ est l'ensemble des nombres de la forme $f(x)$ avec $x \in I$:

$$f(I) := \{f(x) | x \in I\}.$$

Valeurs intermédiaires

Théorème

Soit f une fonction continue et I un intervalle contenu dans DDf. Alors $f(I)$ est un intervalle.

Autrement dit, l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Intervalles

Il y a environ sept sortes d'intervalles. Mais on peut donner une définition uniforme.
Les mathématiciens aiment bien ce genre de "factorisation".

Définition

Une partie I de $\mathbb{R}$ est un intervalle ssi chaque fois qu'elle contient deux nombres, elle contient aussi tout l'intervalle entre ces deux nombres :

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, x \in I \quad \text{et} \quad z \in I \quad \text{et} \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad y \in I.$$

Cas des fonctions croissantes

Proposition

Si f est continue croissante sur l'intervalle $[a,b]$ alors on a

$$f([a,b]) = [f(a), f(b)]$$

Si de plus f est strictement croissante, on a aussi

$$f(]a,b[) =]f(a), f(b)[.$$

Contre exemple

L'image par la fonction partie entière E de l'intervalle $[0,1]$ n'est pas l'intervalle $[0,1]$.

Cas des fonctions quelconques

Pour calculer l'image par des fonctions non monotones, on utilise la formule suivante pour l'image d'une réunion :

Proposition

L'image par une fonction quelconque f de la réunion $I \cup J$ de deux intervalles est la réunion $f(I) \cup f(J)$ des images des deux intervalles.

Exemple

Soit f la fonction carré. On a
$f([-2,3]) = f([-2,0] \cup [0,3]) = f([-2,0]) \cup f([0,3]) = [0,4] \cup [0,9]$.
Et donc $f([-2,3]) = [0,9]$.

Exo 2

Expliquez le calcul de $f(]-4,1])$.

Warning

Attention

L'image d'une intersection n'est en général pas l'intersection des images.

Exo 3

Calculez $\sin([0,2\pi]\cap[\pi,3\pi])$ et $\sin([0,2\pi])\cap\sin([\pi,3\pi])$.

Les bornes des fonctions continues

Théorème

L'image par une fonction continue d'un intervalle fermé borné est aussi un intervalle fermé borné.

Autrement dit, sur un intervalle $[a, b]$ de son domaine de définition, une fonction continue est bornée et atteint ses bornes.

Encore autrement dit

L'image d'un intervalle $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$.

Cet énoncé ne nous étonne pas du tout, avec nos potes, vu que pour les fonctions qu'on connaît, ça se voit gros comme une maison sur le tableau de variations.
Pourtant ce théorème n'est pas facile à prouver. Ceux que ça intéresse sont bienvenus à essayer de comprendre la preuve.

Exemple

Exo corrigé

On pose $f := x \mapsto x^3 - 6x + 1$. Calculer $f([-2, 4])$.

Exo

Exo 4

On pose $f := x \mapsto x^3 - 15x + 2$. Calculer $f([-3, 5])$.