Taylor quadratique

Dédou

Mars 2012

L'inégalité de Taylor quadratique et son dessin

Théorème

Soit f deux fois dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f'' \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(x)$ pour x dans $[a, b]$:

$$f(a) + f'(a)(x-a) + m\frac{(x-a)^2}{2} \leq f(x)$$

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a) + M\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Et ça se dessine grave :
on encadre la fonction par les deux paraboles de Taylor.

Un exemple I

Je peux prendre n'importe quelle f dérivable, par exemple

$$f := x \mapsto e^x,$$

et n'importe quel $I := [a, b]$ dans DDf, par exemple

$$a := 0, \; b := 1.$$

Un exemple II

Pour m et M, c'est comme pour les accroissement finis. Je dois d'abord calculer f'', facile :

$$f'' = x \mapsto e^x.$$

Et après, je dois encadrer f'' sur $[0, 1]$. Comme f'' est croissante, elle est encadrée par ses valeurs aux bornes 0 et 1, à savoir 1 et e. J'ai donc par exemple :

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 1 \leq f''(x) \leq 3.$$

La formule donne alors, pour $0 \leq x \leq 1$:

$$1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{3x^2}{2}.$$

Et pour $x := 1$: $2.5 \leq e \leq 3.5$.

La morale de l'exemple

Comme pour les accroissements finis, quand on applique Taylor, on sait peut-être qui sont f, a et b, mais il faut choisir m et M de façon que l'hypothèse soit vérifiée.

Exo 1

Calculez l'encadrement de Taylor pour ln sur $[1, 2]$.

Taylor et l'approximation quadratique

Dans l'approximation quadratique on "approche" $f(x)$ par

$$f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Avec Taylor, on encadre le même $f(x)$ par

$$f(a)+f'(a)(x-a)+m\frac{(x-a)^2}{2} \quad \text{et} \quad f(a)+f'(a)(x-a)+M\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Notez que l'hypothèse de Taylor implique en particulier

$$m \leq f''(a) \leq M.$$

Taylor à reculons

On a vu comment encadrer $f(x)$ et en particulier $f(b)$ en termes de $f(a), f'(a), m, M$ mais comment encadrer $f(x)$ et en particulier $f(a)$ en termes de $f(b), f'(a), m, M$?
Cette fois il faut prendre les paraboles de Taylor en b. On obtient, pour $x \in [a, b]$:

$$f(b)-f'(b)(b-x)+m\frac{(b-x)^2}{2} \leq f(x) \leq f(b)-f'(b)(b-x)+M\frac{(b-x)^2}{2}.$$

Et en particulier

$$f(b)-f'(b)(b-a)+m\frac{(b-a)^2}{2} \leq f(a) \leq f(b)-f'(b)(b-a)+M\frac{(b-a)^2}{2}.$$

Exemple

Encadrons $\ln 2.7$ "en partant de $\ln e$". On prend donc

$$f := \ln,\ a := 2.7,\ b := e.$$

On a $f' = x \mapsto \frac{1}{x}$ et $f'' = x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.
Cette fonction est croissante sur $[a, b]$, où elle est donc encadrée par ses valeurs aux bornes :

$$-\frac{1}{(2.7)^2} \leq f'' \leq -\frac{1}{e^2}.$$

L'inégalité de Taylor "à reculons" donne

$$1 - \frac{e - 2.7}{e} - \frac{(e-2.7)^2}{2(2.7)^2} \leq \ln 2.7 \leq 1 - \frac{e-2.7}{e} - \frac{(e-2.7)^2}{2e^2}.$$

Exercice

Exo 2

Encadrer $\sin \frac{3}{2}$ par Taylor quadratique sur $[\frac{3}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Preuve de Taylor

On pose $g := x \mapsto f(x) - f(a) - f'(a)(x-a) + m\frac{(x-a)^2}{2}$ et on calcule $g'' = x \mapsto f''(x) - m$. Notre hypothèse assure que g'' est positive, donc que g' est croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Comme $g'(a)$ est nul, on conclut que g' est positive sur $[a, b]$, donc que g y est croissante. Comme $g(a)$ est nul, on conclut que g est positive sur $[a, b]$, ce qui signifie bien

$$f(a) + f'(a)(x-a) + m\frac{(x-a)^2}{2} \leq f(x).$$

On montre la deuxième moitié de la même façon.

Exo 3

Faire cette deuxième moitié de preuve.