Taylor général

Dédou

Mars 2012

De Taylor 2 à Taylor n

Ce qu'on a fait

- pour $n = 1$: les accroissements finis,
- pour $n = 2$: Taylor quadratique,

on va le faire maintenant pour n quelconque.

Rappel : l'approximation quadratique

L'approximation de Taylor d'ordre 2, ou polynôme de Taylor d'ordre 2 d'une fonction f deux fois dérivable en un point a, c'est ce qu'on a appelé l'approximation quadratique de f en a :

$$Q := Q_{f,a} := x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

C'est l'unique trinôme Q du second degré vérifiant

$$Q(a) = f(a), \quad Q'(a) = f'(a), \quad Q''(a) = f''(a).$$

L'approximation de Taylor

Etant donné une fonction f qui est n fois dérivable en un point a,

y'a un unique polynôme T de degré n (au plus) avec les mêmes dérivées que f en a jusqu'à la n-ième :

$$T(a) = f(a),\ T'(a) = f'(a),\ \cdots,\ T^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

On l'appelle polynôme de Taylor d'ordre n de f en a
ou encore développement limité d'ordre n de f en a
ou encore DL d'ordre n de f en a et c'est

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!},$$

autrement dit

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}.$$

Conventions

Pour pouvoir formaliser

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$$

en

$$\sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{(x-a)^i}{i!}$$

il faut activer trois conventions :

- pour tout nombre réel y(ici $x-a$), on a posé $y^0 := 1$;
- on a posé $0! := 1$;
- pour toute fonction f, on pose $f^{(0)} := f$. Cette convention concrétise l'idée que, quand on dérive zéro fois une fonction f, on retrouve f.

Exemple

Exo corrigé

Calculer le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto x^4$ en 1.

Exercice

Exo 1

Calculer le DL à l'ordre 3 de $x \mapsto \sqrt{x}$ en 1.

La variante en h

Pour concrétiser le fait qu'on s'intéresse plutôt aux valeurs de x qui sont proches de a (même si ça ne veut rien dire), on pose $h := x - a$ ce qui conduit aux variantes

$$T(a+h) = f(a) + f'(a)h + \cdots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!},$$

$$T(a+h) = \sum_{i=0}^{n} f^{(i)}(a)\frac{h^i}{i!}.$$

Taylor général

On a une fonction f qui est n fois dérivable sur un intervalle I, avec $a \in I$. On suppose que, sur l'intervalle I, on a un encadrement

$$m \leq f^{(n)} \leq M.$$

Alors, pour tout x dans I, $f(x)$ est encadré par les deux expressions suivantes, obtenues en remplaçant respectivement, dans le DL de degré n de f en a, $f^{(n)}(a)$ par m puis par M :

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + m\frac{(x-a)^n}{n!}$$

et

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + M\frac{(x-a)^n}{n!}.$$

Quel est le plus grand ?

Entre nos deux encadrants,

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + m\frac{(x-a)^n}{n!}$$

et

$$f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + f^{(n-1)}(a)\frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + M\frac{(x-a)^n}{n!},$$

lequel est le plus grand ?
Pour $x \geq a$, la seconde expression est plus grande que la première, mais pour $x \leq a$, ça dépend de la parité de n : on a bien vu que pour $n = 1$ on a deux droites qui se croisent, et pour $n = 2$, on a deux paraboles qui se touchent sans se croiser.

Exemple

Prenons pour f la fonction exponentielle, avec $I := [0, 1]$ et $a := 0$. Comme on sait, toutes les dérivées de f sont égales à f, et on a donc, pour tout n et tout x dans I, l'encadrement

$$1 \leq f^{n)}(x) \leq e.$$

On obtient, pour $x \in I$,

$$1 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{x^n}{n!} \leq e^x \leq 1 + \cdots + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + e\frac{x^n}{n!}.$$

Exo 2

Ecrivez la même formule avec $n := 4$, et sans les points de suspension.

Le calcul de e

Pour $x = 1$, on obtient par exemple

$$1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{1}{n!} \leq e \leq 1 + \cdots + \frac{1}{(n-1)!} + \frac{3}{n!}.$$

On encadre ainsi e entre deux nombres rationnels dont la différence $\frac{2}{n!}$ tend vers 0 ("très vite") avec n.

Exo : le calcul de $\frac{1}{e}$

Exo 3

On prend pour f la fonction $x \mapsto e^{-x}$ avec $I := [0, 1]$ et $a := 0$.
a) Dessinez f.
b) Calculez puis encadrez $f^{(2n)}$ sur I. Faites de même pour $f^{(2n+1)}$.
c) Donnez l'encadrement de Taylor de $f(x)$ à l'ordre 4 pour $x \in I$.
d) Donnez l'encadrement correspondant de $\frac{1}{e}$.