Linéarité de la série de Taylor

Dédou

Avril 2012

Série de Taylor et somme

La série de Taylor de la somme de f et g en a est la somme des séries de Taylor, à savoir

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} (f^{(i)}(a) + g^{(i)}(a)) \frac{(x-a)^i}{i!}.$$

C'est juste parce que la dérivée i-ième de la somme est la somme des dérivées i-ièmes. En termes de DL ça donne la

Méthode

Pour calculer le DL d'une somme de deux fonctions, on calcule les DL des deux fonctions et on les ajoute.

Exemple

La série de Taylor en 0 de $x \mapsto e^x + \frac{1}{1-x}$ est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} (1 + \frac{1}{i!}) x^i \quad \text{ou encore} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i!+1)x^i}{i!}.$$

DL et somme

Pour les DL, c'est pareil

Le DL_n de la somme de f et g en a est la somme des DL_n , à savoir

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} (f^{(i)}(a) + g^{(i)}(a)) \frac{(x-a)^i}{i!}.$$

Exo corrigé

Calculer le DL_3 en 4 de $x \mapsto e^x + \sqrt{x}$.

Exo 1

Calculer le DL_3 en 1 de $x \mapsto e^{2x} + x^3$.

Série de Taylor et multiplication externe

La série de Taylor de λf en a

s'obtient en multipliant celle de f par λ.

Exemple

La série de Taylor en 0 de $x \mapsto \frac{\pi}{1-x}$ est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \pi x^i.$$

Exo 2

Ecrivez la série de Taylor en 0 de $x \mapsto 3e^x$.

DL et multiplication externe

On n'a pas défini nos séries, donc on a encore moins défini comment on les additionne, ou on les multiplie. Ca nous manque un peu mais heureusement on comprend suffisamment ce qui se passe au niveau des polynômes :

Le DL_n de λf en a

s'obtient en multipliant celui de f par λ.

Exo corrigé

Calculer le DL à l'ordre 3 en e de $x \mapsto 12 \ln x$.

Exo 3

Calculer le DL à l'ordre 2 en $\frac{\pi}{4}$ de $x \mapsto 6\sqrt{2} \sin x$.

Série de Taylor et combinaisons linéaires

Comme d'hab, on sait additionner et multiplier par un nombre, donc on sait faire des combinaisons linéaires.

Exo 4

Ecrivez la série de Taylor en 0 de $x \mapsto 3e^x - \frac{\pi}{1-x}$.

DL et combinaisons linéaires

Comme d'hab, c'est pareil pour les DL.

Exo 5

Calculer le DL à l'ordre 3 en 1 de $x \mapsto 2e^x - \pi \ln x$.

Rappel sur les applications linéaires

Une application $f : E \to F$ est dite linéaire si elle transforme les combinaisons linéaires en combinaisons linéaires au sens suivant :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

On meurt d'envie de dire que l'application qui à une (bonne) fonction associe sa série de Taylor en a est linéaire.
Mais pour cela, il faudrait non seulement définir nos séries de Taylor, mais encore mettre une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble de ces séries de Taylor. On ne fera pas ça cette année.
En revanche, on va le faire au niveau des DL.

L'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur I

Un espace vectoriel est un ensemble où on sait faire des combinaisons linéaires et où ça se passe tout bien.
On fixe un intervalle ouvert I. Alors l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur I constitue un espace vectoriel pour les opérations évidentes.

Exo corrigé

Rappelez quelle est cette addition des fonctions dont il est question ici.

Exo 6

Rappelez la formule pour le produit d'une fonction d par un nombre λ.

L'espace vectoriel des polynômes de degré au plus n

L'ensemble des polynômes de degré au plus n constitue lui aussi un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

La linéarité du DL_n

Maintenant on peut formuler de façon sophistiquée la compatibilité du DL avec les combinaisons linéaires :

Proposition

On fixe un intervalle ouvert I, un point a de I et un entier $n \geq 1$. L'application qui, à une fonction indéfiniment dérivable sur I, associe son polynôme de Taylor à l'ordre n en a est linéaire.