

Prépondérance

Dédou

Avril 2012

Vocabulaire

Si $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers a , on dit aussi que $f(x)$ est **infiniment petit** quand x tend vers a .

Bien qu'ils soient tous petits, il y a des infiniment petits qui sont plus petits que d'autres.

L'exemple-phare est constitué par les puissances $(x - a)^n$ qui sont de plus en plus petites quand n augmente. C'est de ça qu'on va parler comme il faut.

Vocabulaire

Si $|f(x)|$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a , on dit aussi que $f(x)$ est **infiniment grand** quand x tend vers a .

Bien qu'ils soient tous grands, il y a des infiniment grands qui sont plus grands que d'autres.

L'exemple-phare est constitué par les puissances x^n quand x tend vers $+\infty$, qui sont de plus en plus grandes quand n augmente.

Prépondérance

On a quatre façons d'exprimer que

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \text{ tend vers } 0 \text{ quand } x \text{ tend vers } a.$$

A savoir :

- $f(x)$ est infiniment petit par rapport à $g(x)$
- $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$,
- $g(x)$ est infiniment grand par rapport à $f(x)$
- $g(x)$ est prépondérant devant $f(x)$

On peut aussi noter ça $f \ll g$ ou $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$.

Prépondérances standard

Proposition

Si p et q sont deux entiers avec $p < q$, c et d deux constantes non nulles et a un réel quelconque, alors $c(x - a)^p$ est prépondérant devant $d(x - a)^q$ quand x tend vers a .

Exo 1

Entre $2(x - 1)^3$ et $3(x - 1)^2$, lequel est négligeable devant l'autre quand x tend vers 1 ?

Prépondérance et Taylor

Dans un polynôme de Taylor (écrit dans le bon sens!), chaque terme (non nul) est prépondérant devant le suivant. Et mieux :

Proposition

Soit f indéfiniment dérivable en a , et T_n son polynôme de Taylor d'ordre n en a . Alors $f(x) - T_n(x)$ est négligeable devant $(x - a)^n$ et d'ailleurs T_n est le seul polynôme de degré au plus n ayant cette propriété.

Exo corrigé

Quand x tend vers 0, que peut-on dire de $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$ et pourquoi ?

Exo 2

Quand x tend vers 1, que peut-on dire de $\sqrt{x} - 1 - \frac{x-1}{2}$ et pourquoi ?