Série de Taylor, le cas des fonctions de base

Dédou

Avril 2012

La série de Taylor

Si on a une fonction f définie sur un intervalle ouvert I avec un point a de I, on sait ce que sont les polynômes de Taylor de f en a, ce sont les polynômes

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}.$$

Cette "série" de polynômes, qu'on appelle série de Taylor de f en a, est encodée dans la formule

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}.$$

Le sens de la série de Taylor

Cette formule

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}.$$

semble bien sympathique, mais il faut cravacher pour lui donner un sens et nous n'allons pas faire ça cette année. Donc pour nous,

la série de Taylor de f en a est $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i(x-a)^i}{i!}$

sera juste une façon compacte de dire

les DL de f en a sont les polynômes $x \mapsto \sum_{i=0}^{n} \frac{c_i(x-a)^i}{i!}$.

Warning

On va aussi écrire des séries de Taylor qui ne sont pas sous la forme officielle $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i(x-a)^i}{i!}$, parce que certains monômes manquent à l'appel et qu'on ne s'en plaint pas.

Exemple

La série de Taylor de la fonction cosinus en 0 est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2i}}{(2i)!}.$$

Entre nous, on peut aussi écrire ça

$$x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots .$$

Exemple

La série de Taylor de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ en 0 est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} x^i.$$

Entre nous, on peut aussi écrire ça

$$x \mapsto 1 + x + \cdots + x^i + \cdots .$$

Exo 1

Ecrivez la série de Taylor de la fonction exponentielle en 0.

Changement d'échelle, exemple

Pour calculer la série de Taylor en 0 de $x \mapsto e^{3x}$, on écrit celle de $x \mapsto e^x$,

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}$$

et on y remplace x par $3x$, ce qui donne

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{3^i x^i}{i!}$$

Série de Taylor et changement d'échelle

Ici, on traîte notre premier changement de variable, on traitera les autres plus loin. C'est le cas où a égale 0 et on remplace x par λx. On pose donc $f_\lambda := x \mapsto f(\lambda x)$. Alors la série de Taylor de f_λ s'obtient en remplaçant x par λx dans celle de f. Autrement dit la série de f_λ est

$$x \mapsto \sum_{i=0} \lambda^i f^{(i)}(0)\frac{x^i}{i!}.$$

Exo corrigé

Ecrire la série de Taylor en 0 de la fonction $x \mapsto \sin 4x$.

Exo 1

Ecrivez la série de Taylor en 0 de la fonction $x \mapsto \cos \pi x$.

Fonctions de base et série de Taylor

Nous avons "cinq" fonctions de base. Pour chacune de ces cinq fonctions on a

- un point a "facile", où on connaît la série de Taylor
- une feinte pour ramener le cas d'un point a quelconque au cas du point facile.

Cette feinte commence toujours par poser $h := x - a$.

La fonction exponentielle

Pour la fonction exponentielle, le point facile est $a := 0$ et on connaît trop bien sa série de Taylor en 0 :

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{x^i}{i!}.$$

La feinte pour l'exponentielle

La feinte pour calculer la série de Taylor de l'exponentielle en un point $a \neq 0$ consiste à poser $h := x - a$ et à écrire

$$e^x = e^{a+h} = e^a e^h$$

ce qui fait apparaître l'expression à traîter comme un multiple de e^h (ici la variable est h et e^a est une constante). D'où la série

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^a (x-a)^i}{i!}.$$

Les fonctions cos et sin

Pour les fonctions cosinus et sinus, le point facile est encore $a := 0$ et les séries de Taylor en 0 sont respectivement

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i}}{(2i)!}$$

et

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{x^{2i+1}}{(2i+1)!}.$$

Exo corrigé

"Calculer" la série de Taylor de $x \mapsto e^{ix}$ et contestez le sens de votre calcul.

Les feintes pour cos et sin

La feinte pour calculer la série de Taylor de la fonction cos en un point $a \neq 0$ consiste à poser $h := x - a$ et à écrire

$$\cos x = \cos(a + h) = \cos a \cos h - \sin a \sin h$$

ou

$$\sin x = \sin(a + h) = \sin a \cos h + \cos a \sin h.$$

ce qui fait apparaître l'expression à traîter comme une combinaison linéaire puisque $\cos a$ et $\sin a$ sont des constantes.

Memo

Comment l'exponentielle complexe éclaire-t-elle les formules d'addition pour cos et sin ?

Exo corrigé

Exo corrigé

Calculer le DL_2 de la fonction sinus en $\frac{\pi}{4}$.

Pour le DL_2 de la fonction sinus en $\frac{\pi}{4}$, on pose $h := x - \frac{\pi}{4}$ et on a

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{4}\cos h + \cos\frac{\pi}{4}\sin h$$

En combinant les DL de cos et sin, on trouve le DL cherché :

$$x \mapsto \frac{\sqrt{2}}{2}\left(1 + (x - \frac{\pi}{4}) - \frac{(x - \frac{\pi}{4})^2}{2}\right).$$

La fonction logarithme : le point facile

Pour la fonction logarithme, le point facile est $a := 1$. Du coup, il y a deux façons d'écrire la série de Taylor correspondante :
une pour $\ln x$:

$$x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{(x-1)^i}{i} \quad = \quad (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \cdots$$

à laquelle on préfère celle pour $h \mapsto \ln(1+h)$:

$$h \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{h^i}{i} \quad = \quad h - \frac{h^2}{2} + \cdots .$$

La fonction logarithme : la feinte

La feinte pour calculer le DL du logarithme en un autre point $a > 0$ consiste à poser $h := x - a$ et à écrire

$$\ln x = \ln(a+h) = \ln(a(1+\frac{h}{a})) = \ln a + \ln(1+\frac{h}{a})$$

ce qui fait apparaître l'expression à traîter comme une somme de deux fonctions dont on sait calculer le DL : la première est une constante et pour la seconde, on peut appliquer la règle de changement d'échelle et le cas facile.

Exo 2

Calculer le DL du logarithme en e à l'ordre 2.

Les fonctions puissance : le point facile

On a non pas une mais une infinité de fonctions puissances, une par exposant réel α. Toutes sont définies au moins sur $]0, +\infty[$. Pour toutes ces fonctions, notre point facile est $a := 1$. Il y a donc deux façons d'écrire la série de Taylor correspondante :
une pour $x \mapsto x^\alpha$:

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} (x-1)^i \quad = \quad 1 + \alpha(x-1) + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}(x-1)^2 + \cdots$$

et une pour $h \mapsto (1+h)^\alpha$:

$$h \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \binom{\alpha}{i} h^i \quad = \quad 1 + \alpha h + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} h^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} h^3 + \cdots .$$

Si α est un entier naturel

la série n'a qu'un nombre fini de termes, et il faut y reconnaître la formule du binôme.

Les fonctions puissance : la feinte

La feinte pour calculer le DL d'une puissance en un autre point $a > 0$ consiste à poser $h := x - a$ et à écrire

$$x^\alpha = (a+h)^\alpha = (a(1+\frac{h}{a}))^\alpha = a^\alpha(1+\frac{h}{a})^\alpha$$

ce qui fait apparaître l'expression à traîter comme un multiple d'une fonction dont on sait calculer le DL : en effet, on peut appliquer la règle de changement d'échelle et le cas facile.

Exo 3

Calculer le DL_2 de la fonction $\sqrt{}$ en 4.