

Développements limités

Dédou

Avril 2011

Vocabulaire

Si f est une fonction indéfiniment dérivable dans un intervalle autour de a , son développement limité à l'ordre n en a n'est autre que son polynôme de Taylor d'ordre n en a .

On peut définir un développement limité (DL) pour des fonctions plus générales, mais cette extension ne nous concerne pas ici.

La notation o

Au lieu d'écrire que la différence $f(x) - T(x)$ est négligeable devant $(x - a)^n$, on écrit

$$f(x) - T(x) = o(x - a)^n$$

et même

$$f(x) = T(x) + o(x - a)^n.$$

C'est-à-dire qu'on fait la convention que $o(f)$ désigne un infiniment petit négligeable devant f , sans qu'on ait besoin de préciser qui est cet infiniment petit à chaque fois.

Warning

$o(x - a)^n$ est un raccourci pour l'horrible $o((x - a)^n)$, et non pas pour le non moins horrible $(o(x - a))^n$.

Exemples

Exemple

Quand x tend vers 0, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Exo corrigé

Ecrivez sous ce format le DL à l'ordre 2 en e de la fonction logarithme.

Exo 1

Ecrivez sous ce format le DL à l'ordre 2 en 3 de la fonction exponentielle.

Calculs de Taylor

Pour calculer le polynôme de Taylor (ou le DL) d'ordre n de f en a , normalement, on doit seulement calculer les dérivées (jusqu'à la n -ième) de f en a . Mais pour calculer la dérivée n -ième de f en a , il faut calculer la dérivée $(n - 1)$ -ième de f en x et pas seulement en a . L'objet du chapitre est de découvrir des méthodes permettant de calculer le DL (ou le polynôme de Taylor) sans calculer toutes les fonctions dérivées. Ce chapitre n'apporte donc rien à la logique de l'approximation de Taylor si ce n'est qu'il met en évidence la grande compatibilité de cette approximation avec les opérations standard sur les fonctions.

La multiplication des séries de Taylor

La série de Taylor d'un produit,
c'est le produit des séries de Taylor.

Ca veut dire quoi, le produit de deux séries de Taylor.

Exemple

Le produit de deux polynômes en x

comme

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + 2x + 3x^4),$$

ça se dessine en deux dimensions.

Exo 1

Calculer en deux dimensions

$$(1 - x + x^3)(1 + 2x^2 + 3x^3).$$

Et pour les séries, c'est pareil !

La multiplication des DL

Le DL d'un produit,

c'est le produit des DL, dans lequel on néglige les monômes négligeables.

Exemple

Le DL₂ en $x := 0$ de $e^x \cos x$ s'obtient en faisant le produit des deux DL

$$\left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) = 1 + x - \frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{4},$$

puis en négligeant les monômes de degré au moins trois, qu'on n'avait donc pas besoin de calculer. Le résultat est donc $x \mapsto 1 + x$.

Exo 2

Calculer le DL₃ en $x := 0$ de $\frac{\sin x}{1-x}$.

DL d'un quotient

On ne donne pas de méthode pour le DL d'un quotient

on a donné une méthode pour le DL d'un inverse : c'est juste un cas particulier du DL d'une puissance.

DL où ?

La règle pour le produit

est valable pour les DL en $a := 0$.

Et elle est encore valable

pour les DL en a quelconque.

Exo 3

Calculer le DL_2 en $x := 1$ de $\frac{e^x}{x}$.

DL d'une exponentielle, ce qu'il ne faut pas faire

Exemple

Calculer le DL₂ en $x := 0$ de $e^{\cos x}$. Quand u tend vers 0 j'ai bien

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

J'ai peut-être

$$e^{\cos x} = 1 + \cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + o(\cos^2 x)$$

(pas sûr) mais je n'ai en aucun cas

$$e^{\cos x} = 1 + \cos x + \frac{\cos^2 x}{2} + o(x^2),$$

qui suggère le DL faux

$$e^{\cos x} = \frac{5}{2} - \frac{3x^2}{2} + o(x^2).$$

DL d'une exponentielle, ce qu'il faut faire

Le principe, c'est que

pour calculer le DL de e^u , on peut faire comme on a envie si u tend vers 0, c'est le cas sans feinte. Et sinon, on trouve une feinte pour se ramener au cas sans feinte.

Exemple sans feinte

Exemple

Calculer le DL_2 en $x := 0$ de $e^{\sin x}$. Quand u tend vers 0 j'ai bien

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

et donc j'ai

$$e^{\sin x} = 1 + \sin x + \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x).$$

Et cette fois $o(\sin^2 x)$, c'est pareil que $o(x^2)$ parce que, quand x tend vers 0, $\sin^2 x$ et x^2 sont équivalents. J'ai donc

$$e^{\sin x} = 1 + x + o(x^2) + \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2),$$

qui donne le DL juste

$$e^{\sin x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Exemple avec feinte

Exemple

Calculons le DL_2 de $x \mapsto e^{e^x}$ en $a := 0$. On pose $v := e^x - 1$. On cherche donc le DL de ee^v avec v qui tend vers 0, facile ! On écrit

$$e^v = 1 + v + \frac{v^2}{2} + o(v^2)$$

et là-dedans, on remplace v par son DL_2 :

$$v = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Puis on néglige les monômes négligeables, et on n'oublie pas de multiplier par e .

Exo 5

Finissez ce calcul.

DL d'un cosinus ou d'un sinus

Le DL d'un cosinus ou d'un sinus,
c'est comme celui d'une exponentielle.

Exemple

Exemple

Calculons le DL₂ de $x \mapsto \cos e^x$ en $a := 0$. On pose $v := e^x - 1$. On cherche le DL de $\cos(1 + v)$. avec v qui tend vers 0, on sait faire ! On écrit

$$\cos(1 + v) = \cos 1 \left(1 - \frac{v^2}{2} + o(v^2)\right) - \sin 1 (v + o(v^2)) + o(v^2)$$

et là-dedans, on remplace v par son DL₂ :

$$v = x + \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Puis on néglige les monômes négligeables.

Exo 6

Finissez ce calcul.

DL d'un logarithme, ce qu'il ne faut pas faire

Exemple

Calculer le DL₂ en $x := 0$ de $\ln(1 + \cos x)$. Quand u tend vers 0 j'ai bien

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

Je n'ai en aucun cas

$$\ln(1 + \cos x) = \cos x - \frac{\cos^2 x}{2} + o(x^2),$$

qui suggère le DL faux

$$\ln(1 + \cos x) = \frac{1}{2} + o(x^2).$$

Exo 7

Calculer le DL₂ en $x := 0$ de $\ln(1 + \cos x)$.

DL d'un logarithme, ce qu'il faut faire

Le principe, c'est que

pour calculer le DL de $\ln(1 + u)$, on peut faire comme on a envie si u tend vers 0, c'est le cas sans feinte. Et sinon on fait une feinte pour se ramener au cas sans feinte.

Exemple sans feinte

Exemple

Calculer le DL₂ en $x := 0$ de $\ln(1 + \sin x)$. Quand u tend vers 0 j'ai bien

$$\ln(1 + u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$$

et donc j'ai

$$\ln(1 + \sin x) = \sin x - \frac{\sin^2 x}{2} + o(\sin^2 x).$$

Et encore une fois $o(\sin^2 x)$, c'est pareil que $o(x^2)$ parce que, quand x tend vers 0, $\sin^2 x$ et x^2 sont équivalents. J'ai donc

$$\ln(1 + \sin x) = x + o(x^2) - \frac{x^2}{2} + o(x^2) + o(x^2),$$

qui donne le DL juste

$$\ln(1 + \sin x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2).$$

Exemple avec feinte

Exemple

Calculons le DL_2 de $x \mapsto \ln(1 + e^x)$ en $a := 0$. On pose $v := e^x - 1$. On cherche donc le DL de $\ln(2 + v)$ avec v qui tend vers 0. On sait faire en écrivant $\ln(2 + v) = \ln 2 + \ln(1 + \frac{v}{2})$.

Exo 8

Finissez ce calcul.

DL d'une puissance

Le DL d'une puissance

c'est comme celui d'un ln.

Exemple

Calculons le DL_2 de $x \mapsto (1 + e^x)^\pi$ en $a := 0$. On pose $v := e^x - 1$. On cherche le DL de $(2 + v)^\pi$ avec v qui tend vers 0. On sait faire en écrivant $(2 + v)^\pi = 2^\pi (1 + \frac{v}{2})^\pi$.

Exo 9

Finissez ce calcul.

Conclusion

Conclusion

La dérivée seconde (par exemple) d'un produit ne se calcule pas en fonction des dérivées secondes des facteurs. Les mathématiciens ont dépassé ce constat d'échec. ils ont découvert que ce qui se comporte bien vis-à-vis de la multiplication (et vis-à-vis des autres opérations, y compris la composition et la dérivation), ce n'est pas une dérivée n -ième toute seule, c'est précisément cette combinaison unique de toutes les dérivées supérieures qu'est la série de Taylor. Cette façon d'assembler des objets naturels (ici les dérivées supérieures) pour forger et mettre en exergue la combinaison abstraite "qui marche" est tout-à-fait caractéristique de la démarche mathématique.