

# Fonctions discontinues

Dédou

Mars 2012

# Négation

Tout énoncé  $A$  a une **négation**  $\bar{A}$  qui est l'énoncé "opposé".

Si un énoncé est vrai, sa négation est fausse, et vice-versa.

En particulier la négation de l'énoncé Vrai est l'énoncé Faux.

Pour les autres énoncés, il y a d'autres règles qui permettent de calculer la négation. On va faire le tour de ces règles.

## Négation d'une égalité

La négation de  $x = y$  est notée  $x \neq y$ .

$$\overline{x = y} = y \neq x.$$

Ici  $x$  et  $y$  doivent être du même type (réel, fonction, ...).

# Exemple

## Exemple

La négation de  $\sqrt{x^2} = x$  est  $\sqrt{x^2} \neq x$ .

## Négation d'une inégalité

La négation de  $x \leq y$  est  $y < x$ .

$$\overline{x \leq y} = y < x.$$

Et vice-versa :

$$\overline{x < y} = y \leq x.$$

Ici  $x$  et  $y$  doivent être des nombres réels.

## Négation d'un "et" ou d'un "ou"

La négation de  $A$  et  $B$  est  $\bar{A}$  ou  $\bar{B}$  :

$$\overline{A \text{ et } B} = \bar{A} \text{ ou } \bar{B}.$$

Et vice-versa :

$$\overline{\bar{A} \text{ ou } \bar{B}} = A \text{ et } B.$$

Ici  $A$  et  $B$  doivent être des énoncés.

## Exo 1

Calculer la négation de  $A$  et  $(B$  ou  $C)$ .

## Négation d'un "implique"

L'énoncé  $A \Rightarrow B$  est un raccourci pour  $\bar{A}$  ou  $B$ .

La négation de  $A \Rightarrow B$  est donc  $A$  et  $\bar{B}$  :

$$\overline{A \Rightarrow B} = A \text{ et } \bar{B}.$$

Exo 2

Calculer la négation de  $(A \text{ ou } B) \Rightarrow (A \text{ et } B)$ .

## Négation d'un "quelque soit"

La négation de  $\forall x \in E, A$  est  $\exists x \in E, \bar{A}$  :

$$\overline{\forall x \in E, A} = \exists x \in E, \bar{A} .$$

Et vice-versa :

$$\overline{\exists x \in E, A} = \forall x \in E, \bar{A} .$$

Exemple

La négation de  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$  est  $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$ .

Exo 3

Calculer la négation de  $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ .

## Définition

La fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est discontinue en  $a$ , si elle n'y est pas continue, c'est-à-dire si

$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R},$

$$|x - a| < \eta \quad \text{et} \quad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

## Rappel de la continuité

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$|x - a| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

## Exemple

Montrons que la fonction “partie entière”  $E$  est discontinue en 1.

### Rappel de la discontinuité

$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R},$

$$|x - 1| < \eta \quad \text{et} \quad |E(x) - 1| \geq \epsilon.$$

On doit donner  $\epsilon$  et on donne  $\epsilon := \frac{1}{2}$ . Et après, pour tout  $\eta$ , on doit donner  $x$ , on donne  $x := 1 - \frac{\eta}{2}$ . Et on doit vérifier

$$|x - 1| < \eta \quad \text{et} \quad |E(x) - 1| \geq \epsilon.$$

Les deux sont faciles (bien voir que  $E(x)$  est négatif ou nul).

On aurait même pu prendre  $\epsilon := 1$ .

# Exemple

## Rappel de la discontinuité

$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R},$

$$|x - 1| < \eta \quad \text{et} \quad |E(x) - 1| \geq \epsilon.$$

## Exemple

Montrer que la fonction suivante est discontinue :

$$x \mapsto \begin{cases} \text{si } x = 1 & \text{alors } \sqrt{2} \\ \text{sinon} & x + 1. \end{cases}$$

## Rappel de la discontinuité

$$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R},$$

$$|x - 1| < \eta \quad \text{et} \quad |E(x) - 1| \geq \epsilon.$$

## Exo 4

Montrer que la fonction suivante est discontinue :

$$x \mapsto \begin{cases} e & \text{si } x = 0 \\ x + \pi & \text{sinon} \end{cases}$$