

# Fonctions de deux variables

Dédou

Avril 2012

## D'une à deux variables

Les fonctions modèlisent de l'information dépendant d'un paramètre.

On a aussi besoin de modéliser de l'information dépendant de plusieurs paramètres, et c'est ce que font les fonctions de plusieurs variables.

Ce qu'on sait faire pour les fonctions d'une variable s'étend dans une certaine mesure aux fonctions de plusieurs variables comme on va le voir.

## Exemple de fonctions de deux variables

Comme les fonctions d'une variable, celles de deux variables s'écrivent avec " $\mapsto$ ".

En voici une :  $d := (x, y) \mapsto |x - y|$ . Je l'appelle  $d$  parce que  $d(x, y)$  est la distance entre  $x$  et  $y$ .

En voici une autre :  $p := (R, R') \mapsto \frac{RR'}{R+R'}$ . C'est la fonction qui donne la résistance d'un montage en parallèle de deux résistances. C'est pour ça que j'ai appelé les variables  $R$  et  $R'$ , mais j'aurais aussi bien pu écrire la même fonction  $(x, y) \mapsto \frac{xy}{x+y}$ .

### Exo 1

Donnez votre exemple favori de fonction de deux variables.

## Domaine de définition

Certaines fonctions sont définies pour toutes les valeurs des (deux) variables mais d'autres non. On va dire que les fonctions de deux variables sont les applications de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}_\perp$ , ce qui permet de définir le domaine de définition par la formule :

$$DDf := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \neq \perp\}.$$

### Exemple

Posons  $f := (x, y) \mapsto \ln(x - y^2) - 2\sqrt{y - x^2}$ .

On a  $DDf = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y \text{ et } x > y^2\}$ .

C'est une partie du plan et ça se dessine.

### Exo 2

Dessinez le domaine de définition de

$$f := (x, y) \mapsto x \ln(x + y) - y\sqrt{y - x}.$$

Le graphe  $Grf$  d'une fonction  $f$  de deux variables, c'est une partie de  $\mathbb{R}^3$ , à savoir :

$$Grf := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = f(x, y)\}.$$

## Exemple

- a) Le graphe de  $(x, y) \mapsto x + y + 1$  est le plan passant par  $(0, 0, 1)$ ,  $(1, 0, 2)$  et  $(0, 1, 2)$ .
- b) Le graphe de  $(x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}$  est "l'hémisphère nord" de la sphère unité.

Ca se dessine ou se visualise.

# Dérivées partielles

Pour une fonction de deux variables, il y a deux dérivées, une "par rapport à  $x$ " et l'autre "par rapport à  $y$ ".

Les formules sont (à gauche la première, à droite la seconde) :

$$(a, b) \mapsto (x \mapsto f(x, b))'(a) \qquad (a, b) \mapsto (x \mapsto f(a, x))'(b).$$

La première est notée  $f'_x$  ou parfois  $\frac{\partial f}{\partial x}$  et la seconde est notée  $f'_y$  ou parfois  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . On a donc

$$f'_x(a, b) = (x \mapsto f(x, b))'(a) \qquad f'_y(a, b) = (x \mapsto f(a, x))'(b).$$

# Calcul de la première dérivée partielle

Pour calculer la première dérivée partielle, on considère  $y$  comme un paramètre et on dérive comme d'habitude.

## Exemple

Posons  $f := (x, y) \mapsto xy + y^2 + \cos xy$ . On a  
 $f'_x(x, y) = y - y \sin xy$ .

## Exo 3

Calculez  $f'_x(x, y)$  pour  $f := (x, y) \mapsto xy^2 - y + e^{xy}$ .

# Calcul de la seconde dérivée partielle

Pour calculer la seconde dérivée partielle, on considère  $x$  comme un paramètre et on dérive "en  $y$ ".

## Exemple

Posons  $f := (x, y) \mapsto xy + y^2 + \cos xy$ . On a  
 $f'_y(x, y) = x + 2y - x \sin xy$ .

## Exo 4

Calculez  $f'_y(x, y)$  pour  $f := (x, y) \mapsto xy^2 - y + e^{xy}$ .

# Le gradient

Si on met les deux dérivées partielles ensemble, on obtient le **gradient** de  $f$ , qu'on note  $\nabla f$ , ce qui se lit aussi "nabla  $f$ " :

$$\begin{aligned}\nabla f : \mathbb{R}^2 &\mapsto \mathbb{R}^2_{\perp} \\ (x, y) &\mapsto (f'_x(x, y), f'_y(x, y))\end{aligned}$$

## Exemple

Posons  $f := (x, y) \mapsto xy + y^2$ . On a  $f'_x(x, y) = y$  et  $f'_y(x, y) = x + 2y$ . Le gradient de  $f$  au point  $(3, 10)$  est donc  $(10, 23)$ .

## Exo 5

Calculez le gradient de  $f := (x, y) \mapsto xe^y - 3yx^2$  en  $(1, 1)$ .

## Le dessin du gradient

Le gradient  $\nabla f(M)$  de  $f$  au point  $M$  est un élément de  $\mathbb{R}^2$  qu'on voit comme un vecteur. Et ce vecteur, on est libre de le voir où on veut : alors on fait le choix des physiciens qui consiste à voir l'origine de ce gradient en  $M$ . Ainsi, quand  $M$  varie, on a un gradient en chaque point. Les physiciens disent que le gradient d'une fonction est un "champ" de vecteurs.

### Exemple

Pour  $f := (x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ , on a  $\nabla f(2, 1) = (4, 4)$  et ça se dessine.

### Exo 6

Pour  $f := (x, y) \mapsto xy - y^2$ , dessinez  $\nabla f(1, 1)$ .

# Le sens du gradient

A une variable, la dérivée dit dans quel sens varie la fonction et à quelle vitesse : plus la dérivée est grande, plus la fonction augmente ("en première approximation").

A deux variables, le gradient pointe dans la direction où la fonction augmente le plus, et plus il est long, plus la fonction augmente ("en première approximation").

# Points critiques

On a compris qu'une fonction dérivable d'une variable atteint ses bornes là où sa dérivée s'annule (ou au bord de son DD).

A deux variables c'est pareil, sauf que la dérivée est remplacée par le gradient.

## Définition

Les points critiques d'une fonction  $f$  de deux variables sont les points où son gradient s'annule.

## Points critiques : exemples

### Exemple

Les points critiques de  $f := (x, y) \mapsto x^3 - 3x + y^2$  sont ceux qui vérifient les deux équations  $3x^2 - 3 = 0$  et  $2y = 0$ .

On trouve deux points critiques :  $(1, 0)$  et  $(-1, 0)$ .

### Exo 7

Trouver les points critiques de  $f := (x, y) \mapsto x^2 - 4x + y^3 - 3y$ .

# Courbes de niveau

Les courbes de niveau d'une fonction  $f$  de deux variables sont les lieux où  $f$  est constante, il y en a une par valeur prise :

$$\text{Niv}_c := \{M \in \mathbb{R}^2 \mid f(M) = c\}.$$

## Exemple

Pour  $f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , et  $c$  positif, la courbe de niveau  $c$  est le cercle de rayon  $\sqrt{c}$  centré en l'origine.

## Courbe de niveau par un point

Si  $A$  est un point du domaine de définition de  $f$ , il y passe une courbe de niveau de  $f$ , celle de niveau  $f(A)$ .

L'équation de la courbe de niveau de  $f$  passant par  $A$  est

$$f(M) = f(A).$$

### Exemple

Pour  $f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , et  $A := (3, 4)$ , l'équation de la courbe de niveau passant par  $A$  est  $x^2 + y^2 = 25$ , c'est donc le cercle de rayon 5 centré en l'origine.

### Exo 8

Pour la même fonction, quelle est la courbe de niveau passant par  $(1, 2)$  ?

# Courbe de niveau et gradient

Là où le gradient est non nul, il est perpendiculaire à la courbe de niveau. Autrement dit, la tangente à la courbe de niveau est perpendiculaire au gradient.

"Pour monter (ou descendre) le plus vite, il faut partir perpendiculairement à la courbe de niveau".

## Exemple

Pour  $f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , et  $A := (3, 4)$ , la courbe de niveau passant par  $A$  est le cercle de rayon 5 centré en l'origine. Et on a  $\nabla f(3, 4) = (6, 8)$ , qui est bien proportionnel au rayon.

# Plan tangent au graphe

Pour une fonction dérivable  $f$  d'une variable, on se rappelle que l'équation de la tangente au graphe au point  $(a, f(a))$  est

$$y = f(a) + (x - a)f'(a).$$

Si  $f$  est à deux variables, c'est presque pareil, l'équation du plan tangent au point  $(a, b, f(a, b))$  est

$$z = f(a, b) + (x - a)f'_x(a, b) + (y - b)f'_y(a, b).$$

## Exemple

Pour  $f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ , et  $A := (3, 4)$ , l'équation du plan tangent est

$$z = 25 + 6(x - 3) + 8(y - 4).$$

# Approximation linéaire

Pour une fonction dérivable  $f$  d'une variable, on se rappelle que l'approximation linéaire au point  $a$  est la fonction dont le graphe est la tangente, à savoir :

$$x \mapsto f(a) + (x - a)f'(a).$$

Si  $f$  est à deux variables, c'est presque pareil, l'approximation linéaire au point  $(a, b)$  est la fonction dont le graphe est le plan tangent, à savoir :

$$(x, y) \mapsto f(a, b) + (x - a)f'_x(a, b) + (y - b)f'_y(a, b).$$

## Exo 9

Calculez l'approximation linéaire de  $f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2$  en  $A := (3, 4)$ .

# Dérivées partielles supérieures

Pour faire des approximations quadratiques et autres, il faut des dérivées supérieures. Bien entendu, on peut par exemple dériver deux fois, et ce de quatre façons.

Ces quatre dérivées sont notées  $f''_{x^2}$ ,  $f''_{xy}$ ,  $f''_{yx}$ ,  $f''_{y^2}$  sauf que les deux du milieu sont toujours égales, donc on n'écrit jamais  $f''_{yx}$ .

## Exo 10

Calculez  $f''_{xy}$  et  $f''_{yx}$  pour  $f := (x, y) \mapsto e^{xy} + x \sin y$ .

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un rectangle ;

alors  $f$  atteint son maximum et son minimum soit sur le bord du rectangle, soit en des points critiques.

## Exemple

On considère la fonction  $f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$  sur le rectangle défini par les deux conditions  $0 \leq x \leq 3$  et  $1 \leq y \leq 5$ .

On a  $f(x, y) = (x - 1)^2 + (y - 2)^2 - 5$ . On voit qu'elle atteint son maximum en  $(3, 5)$  qui est sur le bord du rectangle, et son minimum  $(-5)$  en  $(1, 2)$  qui est un point critique.

## Exo 11

Trouver le maximum et le minimum de la fonction

$f := (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 3x - 3y$  sur le rectangle défini par les deux conditions  $0 \leq x \leq 2$  et  $1 \leq y \leq 5$ .

## Intermède : mauvaise foi

On a dit :

Si  $f$  est une fonction dérivable sur un rectangle, alors  $f$  atteint son maximum et son minimum soit sur le bord du rectangle, soit en des points critiques.

Exo 12

Donner une interprétation fausse (et de mauvaise foi !) de cet énoncé.

## Extrema sur le bord

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un rectangle.

On trouve les extrema de  $f$  sur le bord du rectangle en examinant les quatre côtés, et en gardant le meilleur de ce qu'on trouve.

### Exemple

On considère la fonction  $f := (x, y) \mapsto xy^2 - xy + x^3y$  sur le rectangle défini par les deux conditions  $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq 2$ . Cette fonction est nulle sur deux des quatre côtés du rectangle. Sur le bord d'en haut, on a la fonction  $x \mapsto 2x + 2x^3$  qui est croissante et varie de 0 à 4. Sur le bord de droite, on a la fonction  $y \mapsto y^2$  qui est croissante et varie de 0 à 4. Donc, sur le bord le minimum de la fonction est 0 et son maximum est 4.

## Extrema tout court : exemple

### Exemple

On considère encore la fonction  $f := (x, y) \mapsto xy^2 - xy + x^3y$  sur le rectangle défini par les deux conditions  $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq 2$ . Sur le bord le minimum de la fonction est 0 et son maximum est 4. Pour trouver le minimum de cette fonction sur tout le rectangle, on calcule ses points critiques, qui sont définis par  $y^2 - y + 3x^2y = 2xy - x + x^3 = 0$ . En dehors des axes, on trouve  $y + 3x^2 = 1$  et  $2y + x^2 = 1$ . En résolvant ce système, on trouve, dans notre rectangle, le point critique  $(\frac{2}{5}, \frac{1}{\sqrt{5}})$ . En ce point,  $f$  prend la valeur négative  $\frac{10\sqrt{5}-42}{125\sqrt{5}}$  qui est donc son minimum.

## Exo 13

Calculer le maximum et le minimum de  
 $f := (x, y) \mapsto 2xy^2 - xy + x^3y$  sur le même rectangle défini par les  
deux conditions  $0 \leq x \leq 1$  et  $0 \leq y \leq 2$ .