Convexité

Dédou

Mars 2012

Rallyez-vous ! ! !

Rappel : sens de variation

Un truc qu'on a bien compris, c'est que

le sens de variation de f parle de l'ordre entre $f(x)$ et $f(y)$

comme fonction de l'ordre entre x et y.

.

Et aussi que, si f est dérivable,

son sens de variation est gouverné par

le signe de sa dérivée.

Exemples

La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes :

leur concavité est tournée vers le haut.

La fonction racine carrée et la fonction logarithme sont concaves :

leur concavité est tournée vers le bas.

La fonction sinus et la fonction cosinus

ne sont ni convexes ni concaves.

Tout ça se dessine.

Définition de la convexité

La convexité d'une fonction f, ça nous parle du sens de variation de son taux de variation.

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ca se dessine grave et ça dit que

"entre deux points quelconques la fonction reste sous la corde".

Définition de la concavité

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est concave si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ca se dessine presque pareil et ça dit que

"entre deux points quelconques (x et z),
la fonction est au-dessus de la corde."

Définitions strictes

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est strictement convexe si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Exo corrigé

Donner la définition de fonction strictement concave.

La convexité des fonctions partielles

Si f n'est pas partout définie, on arrange le coup avec son domaine de définition.

Définition

Soit f une fonction quelconque. On dit que f est convexe si

$$\forall x, y, z \in DDf, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

La convexité locale

La fonction sinus n'est ni concave ni convexe, pas plus qu'elle n'est croissante ou décroissante.

Mais de la même façon qu'elle est croissante sur certains intervalles et décroissantes sur d'autres, elle est convexe sur certains intervalles et concave sur d'autres.

Définition

Soit f une fonction quelconque. On dit que f est convexe sur une partie I de son domaine de définition si

$$\forall x, y, z \in I, \;\; x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Exemple

La fonction cosinus est concave sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Ca se dessine.

Critère infinitésimal de convexité

La convexité des fonctions (une ou deux fois) dérivables est gouvernée par le sens de variation de la première dérivée, ou le signe de la dérivée seconde.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors f est convexe sur I ssi sa dérivée première y est croissante.

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
Alors f est convexe sur I ssi sa dérivée seconde y est positive.

Ca se démontre mais bon...

Exo corrigé

Ecrire la variante pour la concavité.

Critère infinitésimal de stricte convexité

Pour la stricte convexité, on a une condition suffisante et une CNS.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Alors f est strictement convexe sur I ssi sa dérivée première y est strictement croissante.

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
Alors pour que f soit strictement convexe sur I, il suffit que sa dérivée seconde y soit strictement positive.

Exemple

Exo corrigé

Donnez un intervalle maximal où la fonction cosinus est croissante et concave.

Exo 1

Donnez un intervalle maximal où la fonction sinus est décroissante et convexe.

Exemples

Le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est strictement convexe pour a strictement positif et strictement concave pour a strictement négatif.

La fonction $x \mapsto x^4$ est strictement convexe puisque sa dérivée est strictement croissante.

Exemple

Exo corrigé

Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $f := x \mapsto x^2 + ex + 2m \cos x$ est-elle convexe ? strictement convexe ?

Exo

Exo 2

Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $f := x \mapsto 2x^2 + m \sin x$ est-elle convexe ? strictement convexe ?

Convexité et tangentes

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe ssi f majore toutes ses linéarisées.

Ca se démontre et surtout ça se dessine.

Approximation linéaire et convexité

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I avec $a \in I$.
Si f'' est positive sur I, alors, sur I, f majore sa linéarisée en a.
Si f'' est négative sur I, alors, sur I, f minore sa linéarisée en a.

Ca se démontre et surtout ça se dessine.

Exemple

La dérivée seconde de la fonction $f := x \mapsto x^3$ est positive sur $I :=]0, +\infty[$. et donc, sur I, f majore sa linéarisée en 1 qui est $x \mapsto 1 + 3(x - 1)$.

Exemple

Exo corrigé

Comparer la fonction sinus à sa linéarisée en $a := \frac{\pi}{4}$ dans un intervalle autour de a.

Exo

Exo 3

Comparer la fonction $f := x \mapsto x^3 - 4x^2$ à sa linéarisée en $a := 1$ dans un intervalle autour de a.