

Contrôler une fonction

Dédou

Février 2012

Rappel : l'inégalité des accroissements finis

Théorème IAF

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur } I.$$

Alors on a l'encadrement suivant :

$$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a).$$

Dans cette variante, on ne suppose pas $a < b$:

Théorème IAF

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ et M un nombre réel. On suppose

$$|f'| \leq M \quad \text{sur } I.$$

Alors on a la majoration suivante

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

Théorème IAF

Soit f dérivable sur l'intervalle I et M un nombre réel. On suppose

$$|f'| \leq M \quad \text{sur } I.$$

Alors, pour x et y quelconques dans I , on a la majoration suivante

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

Théorème IAF

Soit f dérivable sur l'intervalle I et M un nombre réel et a un point de I . On suppose

$$|f'| \leq M \quad \text{sur } I.$$

Alors, pour x quelconque dans I , on a la majoration suivante

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|.$$

Rappel sur inégalités et valeur absolue

L'inégalité

$$|b - a| \leq M$$

équivalent à la double inégalité

$$a - M \leq b \leq a + M$$

et aussi à la double inégalité

$$b - M \leq a \leq b + M$$

L'idée de continuité

On voudrait dire que

La fonction f est continue en a ssi elle vérifie la condition :
si x tend vers a , alors $f(x)$ tend vers $f(a)$.

Mais

on ne sait pas donner un sens à
 x tend vers a

pas plus qu'à
 $f(x)$ tend vers $f(a)$.

Exo corrigé

Essayer de définir “ x tend vers a ”.

Fonctions à dérivée bornée I

Exemple

La fonction $f := x \mapsto 3x + \sin \pi x$ est dérivable et sa dérivée est bornée. En effet sa dérivée

$$f' := x \mapsto 3 + \pi \cos \pi x$$

vérifie $3 - \pi \leq f' \leq 3 + \pi$ ou encore, en prenant de la marge :

$$|f'| \leq 10.$$

Exo corrigé

Donnez une autre fonction dérivable sur \mathbb{R} à dérivée bornée.

Fonctions à dérivée bornée II

Notre fonction $f := x \mapsto 3x + \sin \pi x$ vérifie

$$f(2) = 6, \quad |f'| \leq 10.$$

On s'intéresse à ses valeurs au voisinage de $a := 2$.

Par IAF, on a, pour tout réel x

$$|f(x) - 6| \leq 10|x - 2|.$$

Cette inégalité nous permet de contrôler f , on va voir en quel sens.

Exercice corrigé

Exo corrigé

Trouver un intervalle autour de 2 dans lequel $f := x \mapsto 3x + \sin \pi x$ reste entre 5.9 et 6.1.

Par IAF, on sait qu'on a, pour tout réel x

$$|f(x) - 6| \leq 10|x - 2|.$$

Pour garantir

$$|f(x) - 6| \leq 0.1,$$

il suffit d'imposer $10|x - 2| \leq 0.1$, autrement dit $|x - 2| \leq 0.01$ ou encore

$$1.99 \leq x \leq 2.01.$$

Ca se dessine.

Exo 1

Trouver un intervalle autour de 3 dans lequel
 $f := x \mapsto 3x + \cos \pi x$ reste entre 7.98 et 8.02.

Le problème de la continuité

On a par exemple une fonction f qui vérifie

$$f(3) = 5$$

Problème de la continuité en 3

Etant donné un nombre ϵ "petit" (genre 0.1, ou 0.02), on cherche un intervalle autour de 3 dans lequel f reste entre $5 - \epsilon$ et $5 + \epsilon$.

Si par exemple notre fonction f vérifie pour tout x , $|f'(x)| \leq 8$
on sait faire !

Pour garantir $|f(x) - f(3)| \leq \epsilon$

il suffit d'imposer $|x - 3| \leq \frac{\epsilon}{8}$.

Autrement dit : pour garantir $5 - \epsilon \leq f(x) \leq 5 + \epsilon$

il suffit d'imposer $3 - \eta \leq x \leq 3 + \eta$ avec $\eta := \frac{\epsilon}{8} > 0$.

Exercice corrigé

Exo corrigé

On pose $f := x \mapsto 2x + \cos \pi x$. Trouver un majorant de $|f'|$ puis un intervalle de centre 3 dans lequel f reste dans l'intervalle $[5 - \epsilon, 5 + \epsilon]$, où ϵ est un réel strictement positif donné.

Exo 2

On pose $f := x \mapsto 3x + 4 \sin \pi x$. Trouver un majorant de $|f'|$ puis un intervalle de centre 2 dans lequel f reste dans l'intervalle $[6 - \epsilon, 6 + \epsilon]$, où ϵ est un réel strictement positif donné.

Exercice corrigé

On n'a pas besoin d'un majorant de f' sur tout \mathbb{R} .

Exo corrigé

On pose $f := x \mapsto x^2 + 10 \cos \pi x$. Trouver un majorant de $|f'|$ sur un intervalle de centre 2, puis un autre intervalle de centre 2 dans lequel f reste dans l'intervalle $[13.7, 14.3]$.

Exo 3

On pose $f := x \mapsto x^3 + 9 \sin \pi x$. Trouver un majorant de $|f'|$ sur un intervalle de centre 3, puis un autre intervalle de centre 2 dans lequel f reste dans l'intervalle $[26.9, 27.1]$.

Exo corrigé

On pose $f := x \mapsto x^3$. Trouver un majorant de $|f'|$ sur un intervalle de centre 2, puis un autre intervalle de centre 2 dans lequel f reste dans l'intervalle $[8 - \epsilon, 8 + \epsilon]$ avec ϵ strictement positif donné.

Exo 4

On pose $f := x \mapsto x^4$. Trouver un intervalle de centre 2 dans lequel f reste dans l'intervalle $[16 - \epsilon, 16 + \epsilon]$ avec ϵ strictement positif donné.