Continuité

Dédou

Mars 2012

Continuité en un point

Définition

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a si, pour tout intervalle non vide centré en $f(a)$, $J :=]f(a) - \epsilon, f(a) + \epsilon[$, on peut choisir un intervalle non vide centré en a, $I :=]a - \eta, a + \eta[$ dont tous les éléments sont envoyés dans J par f.

Ca se dessine et il faut avoir lu "Contrôler une fonction" pour comprendre cette définition.

Variante moins poétique

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

pour tout réel strictement positif ϵ, il en existe un autre η tel que, pour tout x entre $a - \eta$ et $a + \eta$, $f(x)$ soit entre $f(a) - \epsilon$ et $f(a) + \epsilon$.

Variante pas poétique du tout

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$a - \eta < x < a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

Trois quantificateurs, un record !

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$a - \eta < x < a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

Cette phrase comporte trois quantificateurs, c'est notre record.

Exemple

Exemple

La fonction carré $f := x \mapsto x^2$ est continue en $a := 3$. Si on applique cet énoncé à $\epsilon := 0.02$, on obtient

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3 - \eta < x < 3 + \eta \quad \Rightarrow \quad 8.98 < x^2 < 9.02.$$

Exercice

Exemple

La fonction carré $f := x \mapsto x^2$ est continue en $a := 3$. Si on applique cet énoncé à $\epsilon := 0.02$, on obtient

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad 3 - \eta < x < 3 + \eta \quad \Rightarrow \quad 8.98 < x^2 < 9.02.$$

Exo 1

La fonction cosinus est continue en $a := 2\pi$. Si on applique cet énoncé à $\epsilon := 0.003$, qu'obtient-on ?

L'ordre des quantificateurs I

La condition obtenue en inversant l'ordre des deux premiers quantificateurs est

$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$
$a - \eta < x < a + \eta \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$

Elle est fausse

par exemple pour toutes les fonctions strictement croissantes.

L'idée est que, si la fonction est continue,
pour tout ϵ, on trouve un η qui marche,
mais plus ϵ est petit et plus on doit prendre η petit.
Tandis que la condition bidon ci-dessus demande un seul et même η qui marche pour toutes les valeurs de ϵ.

L'ordre des quantificateurs II

Voici un exemple plus simple montrant que l'ordre des quantificateurs ne doit pas être négligé.

Toute fonction f sur $\mathbb{R}$ vérifie

$$\forall x \in \mathbb{R}, \exists M \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

(prendre $M := f(x)$).

La fonction exponentielle ne vérifie pas

$$\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$$

(ici il faudrait trouver un M "avant de connaître x").

Variante avec intervalles

Sans intervalles :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$a - \eta < x < a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

Avec intervalles :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$x \in \left]a - \eta, \, a + \eta\right[\quad \Rightarrow \quad f(x) \in \left]f(a) - \epsilon, \, f(a) + \epsilon\right[.$$

Variante avec valeurs absolues

Sans valeurs absolues :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$a - \eta < x < a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

Avec valeurs absolues :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$|x - a| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Exemple

Exemple

La fonction cube $f := x \mapsto x^3$ est continue en $a := 2$. Si on applique la version avec valeurs absolues à $\epsilon := 0.05$, on obtient

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 2| < \eta \quad \Rightarrow \quad |x^3 - 8| < 0.05.$$

Exercice

Exo 2

La fonction exponentielle est continue en $a := 1$. Si on applique la version avec valeurs absolues à $\epsilon := 0.06$, qu'obtient-on ?

Inégalités strictes ou larges ?

Chacun doit prendre le temps de comprendre ce qui se passe si on remplace, dans la définition de continuité, certaines inégalités strictes par les larges.

Et il faut retenir que la "strictitude" pour ϵ et pour η n'est pas négociable.

Variante avec inégalités larges

Avec inégalités strictes :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$a - \eta < x < a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$$

Avec inégalités larges :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$a - \eta \leq x \leq a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon \leq f(x) \leq f(a) + \epsilon.$$

Variante avec valeurs absolues et inégalités larges

Avec inégalités strictes :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$|x-a| < \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| < \epsilon.$$

Avec inégalités larges :

Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ et a un réel. On dit que f est continue en a ssi :

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$|x-a| \leq \eta \quad \Rightarrow \quad |f(x)-f(a)| \leq \epsilon.$$

Le cas d'une fonction partielle

Soit f une fonction et a un réel de son domaine de définition. On dit que f est continue en a ssi :

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in DDf,$
$a - \eta < x < a + \eta \quad \Rightarrow \quad f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$

Exemple

Exemple

La fonction racine carrée est continue en $a := 4$. Si on applique la version avec valeurs absolues à $\epsilon := 0.3$, on obtient

$$\exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall x \in [0, +\infty[, \quad |x - 4| < \eta \quad \Rightarrow \quad |\sqrt{x} - 2| < 0.3.$$

Exercice

Exo 3

La fonction logarithme est continue en $a := e$. Si on applique la version avec valeurs absolues à $\epsilon := 0.8$, qu'obtient-on ?

Le cas des fonctions dérivables à dérivée bornée

Proposition

Soit f une fonction dérivable à dérivée bornée sur un intervalle I. Alors f est continue en tout point de I.

Idée de la preuve

Quitte à remplacer M par $M+1$, on peut supposer qu'on a $|f'| \leq M$ avec $M > 0$. Y'a plus qu'à prendre $\eta := \frac{\epsilon}{M}$.

Ca marche aussi pour les fonctions dérivables quelconques, mais c'est un peu plus compliqué à prouver.

Continuité globale

Définition

On dit qu'une fonction est continue si elle l'est en tout point de son domaine de définition.

La plupart de nos fonctions sont continues.

On dit donc qu'une fonction f est continue en a ssi :

$\forall a \in DDf, \forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in DDf,$
$a - \eta < x < a + \eta \Rightarrow f(a) - \epsilon < f(x) < f(a) + \epsilon.$

C'est un truc avec quatre quantificateurs, record battu !