Variations

Dédou

Février 2012

Fonctions croissantes

On dit qu'une fonction f est croissante ssi

pour x et y dans le DD de f, si on a $x \leq y$, on a aussi $f(x) \leq f(y)$.

En langage plus formel, ça donne

$$\forall x, y \in DD(f), x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

Exo corrigé

Donnez la définition formelle de "f est décroissante".

Fonctions strictement croissantes

On dit qu'une fonction f est strictement croissante ssi

pour x et y dans le DD de f, si on a $x < y$, on a aussi $f(x) < f(y)$.

En langage plus formel, ça donne

$$\forall x, y \in DD(f), x < y \Rightarrow f(x) < f(y).$$

Exemple

La fonction cube $x \mapsto x^3$ est strictement croissante, bien que sa dérivée s'annule (en zéro).

Fonctions croissantes non strictement croissantes

Quand nos fonctions usuelles sont croissantes

elles sont le plus souvent strictement croissantes.

Pour fabriquer une fonction croissante non strictement, il faut se creuser la cervelle.

Exemple

La fonction $x \mapsto \mathrm{si}\, x > 0\, \mathrm{alors}\, x\, \mathrm{sinon}\, 0$ est croissante non strictement.

Exo corrigé

Donner un exemple de fonction décroissante non strictement.

Fonctions monotones

On dit qu'une fonction f est monotone ssi

elle est soit croissante soit décroissante.

Contre-exemple

La fonction carré $x \mapsto x^2$ n'est pas monotone : en effet, bien qu'elle soit "tantôt croissante, tantôt décroissante", elle n'est ni croissante ni décroissante.

Exo corrigé

Devinez la définition de "fonction strictement monotone".

Fonctions parfois croissantes

Bien que la fonction carré $x \mapsto x^2$ ne soit pas monotone, on a des choses intéressantes à dire sur son sens de variation.

On dit qu'une fonction est croissante sur une partie I de $DD(f)$ ssi

$$\forall x, y \in I, x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y).$$

On s'intéresse surtout au cas où I est un intervalle.

Exemple

La fonction carré est croissante sur l'intervalle $[2, e[$.

On a les notions voisines de décroissance, croissance stricte, monotonie, etc, sur I.

Intervalles de monotonie

On dit que I est un intervalle de stricte monotonie de f ssi

- I est contenu dans $DD(f)$ et
- f est strictement monotone sur I.

Exemple

L'intervalle $[0, \pi[$ est un intervalle de stricte monotonie de la fonction cosinus.

Exo corrigé

Donnez un intervalle de stricte monotonie de la fonction sinus.

Intervalles de stricte monotonie maximaux

C'est un peu débile de dire que la fonction carré est croissante sur $[2; e[$ alors qu'on sait bien que c'est une information tronquée, la bonne info étant que cette fonction est croissante (et même strictement) sur $[0, +\infty[$.

On dit que I est un intervalle de stricte monotonie maximal de f ssi

- I est un intervalle de stricte monotonie de f
- I n'est pas contenu dans un intervalle de stricte monotonie de f plus grand (strictement).

Exemple

L'intervalle $[0, \pi]$ est un intervalle de stricte monotonie maximal de la fonction cosinus.

Exo corrigé

Donnez un intervalle de stricte monotonie maximal de la fonction sinus.

Tableau de variation :exo corrigé I

Le tableau de variation d'une fonction met en évidence ses intervalles de stricte monotonie maximaux.

Exo corrigé

Donnez les intervalles de stricte monotonie maximaux d'une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	6

Cette fonction a une infinité d'intervalles de stricte monotonie, mais seulement trois d'entre eux sont maximaux.

Exo 1

Donnez les intervalles de stricte monotonie maximaux d'une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		$-\pi$		$\sqrt{2}$		e		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	$-\infty$

Tableau de variation :exo corrigé 2

Le tableau de variation d'une fonction encadre les antécédents de chaque nombre :

Exo corrigé

Encadrer les antécédents de 1 par une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
			4				6
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	2				0		

Tableau de variation : exo

Exo 2

Encadrer les antécédents de $\sqrt{2}$ par une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		-7		0		4		$+\infty$
			4				6		
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				2				$-\infty$

Tableau de variation :exo corrigé 3

Le tableau de variation d'une fonction permet de comparer certaines valeurs prises :

Exo corrigé

Comparer si possible les valeurs prises en 9 et -9 par une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		-7		4		$+\infty$
			4				1
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	
	2				0		

Tableau de variation : exo III

Exo 3

Comparer si possible les valeurs prises en 5 et -5 par une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		-7		0		4		$+\infty$
$f(x)$			4				6		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	2				0				5

Tableau de variation : exo IV

Exo 4

Comparer si possible les valeurs prises en 8 et -8 par une fonction f dont voici le TV :

x	$-\infty$		-7		0		4		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	6	$\searrow$	3

Monotonie et opérations

Proposition

- La somme de deux fonctions croissantes sur I est croissante sur I.
- Le produit de deux fonctions **positives** croissantes sur I est une fonction croissante sur I.
- Le quotient d'une fonction **positive** croissante sur I par une fonction **positive** et **décroissante** sur I est une fonction croissante sur I.
- L'opposée d'une fonction croissante sur I est décroissante sur I, et vice-versa.

Exo corrigé

Démontrer le premier des énoncés ci-dessus.

Monotonie et factorisation

La notion de monotonie est là pour traîter simultanément le cas "croissant" et le cas " décroissant" (on parle de *factorisation*). Mais attention, les deux énoncés (vrais)

- La somme de deux fonctions croissantes sur I est croissante sur I.
- La somme de deux fonctions décroissantes sur I est décroissante sur I.

ne peuvent pas être factorisés en l'énoncé suivant, qui est faux :

la somme de deux fonctions monotones sur I est monotone sur I.

En revanche, on a des bonus, comme :

Tout multiple d'une fonction monotone est monotone.

Addition de fonctions monotones : exemples

Exemple

Les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto -x$ sont monotones, mais leur somme $x \mapsto x^3 - x$ ne l'est pas .

Exo corrigé

Donner un autre exemple d'une somme de deux fonctions monotones qui n'est pas monotone.

Monotonie et composition

Proposition

La composée de deux fonctions monotones est monotone.
La composée de deux fonctions strictement monotones est strictement monotone.

Et ça se démontre !

Exo corrigé

Démontrer ça.

Dérivée et monotonie

Proposition

Soit f dérivable sur l'intervalle I. Alors

$$f \text{ est croissante sur } I \text{ ssi } f' \text{ est positive sur } I.$$

Exo corrigé

Donnez l'énoncé analogue pour la décroissance.

Dérivée et stricte monotonie

Proposition

Soit f dérivable sur l'intervalle I. Si f' est strictement positive sur I, alors f est strictement croissante sur I.

Bien voir que cette fois, la condition est suffisante mais pas nécessaire.

Exo corrigé

Donnez un exemple de fonction strictement croissante dont la dérivée n'est pas strictement positive.