Inégalités

Dédou

Février 2012

Inégalités vraies et fausses

Une inégalité, comme $\pi \leq e$,

c'est un énoncé, qui peut donc être vrai ou faux.

Inégalités strictes et larges

On distingue soigneusement

les inégalités strictes, comme $2 < 1$
et les larges, comme $3 \leq \pi$.

Quels que soient les deux nombres a et b,

- si $a \leq b$ est vrai, alors $b < a$ est faux
- et vice-versa.

Autrement dit :

La négation de $a \leq b$ c'est $b < a$

et la négation de $a < b$ c'est $b \leq a$.

Recette d'inégalité : la somme

1. Prenez deux inégalités larges de même sens (vraies)
2. ajoutez-les membre-à-membre
3. l'inégalité obtenue est encore vraie.

Exemple

On a

$$e \leq 3$$

et

$$1 \leq \sqrt{2}$$

donc aussi

$$e + 1 \leq 3 + \sqrt{2}.$$

Recette d'inégalité : encore la somme

1. Prenez deux inégalités de même sens (vraies) dont au moins une stricte
2. ajoutez-les membre-à-membre
3. l'inégalité stricte obtenue est encore vraie.

Exemple

On a

$$\pi > 3$$

et

$$2 \geq \sqrt{2}$$

donc aussi

$$\pi + 2 > 3 + \sqrt{2}.$$

Recette d'inégalité : le produit

1. Prenez deux inégalités larges de même sens (vraies) **entre nombres positifs**
2. multipliez-les membre-à-membre
3. l'inégalité large obtenue est encore vraie.

Exo 2

Donnez un exemple montrant que la condition de positivité n'est pas superflue.

Recette d'inégalité : encore le produit

1. Prenez deux inégalités strictes de même sens (vraies) **entre nombres positifs**
2. multipliez-les membre-à-membre
3. l'inégalité stricte obtenue est encore vraie.

Recette d'inégalité : le quotient

1. Prenez deux inégalités larges de sens contraires (vraies) **entre nombres strictement positifs**
2. divisez-les membre-à-membre
3. l'inégalité large obtenue est encore vraie (dans le sens des numérateurs).

Exemple

On a $\pi \geq 3$ et $2 \leq \sqrt{5}$ donc aussi $\frac{\pi}{2} \geq \frac{3}{\sqrt{5}}$.

Exo 3

a) Donnez un exemple montrant que la condition de positivité n'est pas inutile.
b) Donnez un exemple montrant que la condition de sens contraire n'est pas superflue.

Recette d'inégalité pour les négatifs

Les recettes pour produit et quotient ne traîtent que les positifs. Quand les signes sont quelconques, si les deux signes sont différents, c'est bidon. Et face à deux négatifs, on change les signes, suivant la recette :

1. Prenez une inégalité (vraie)
2. changez son sens
3. remplacez les deux nombres par leurs opposés
4. vous obtenez une nouvelle inégalité (vraie).

Autrement dit, si a et b sont négatifs,

pour montrer $a \leq b$, on montre $-b \leq -a$.

(Ainsi, on se ramène à des positifs.)

Recette d'inégalité : le cube

1. Prenez une inégalité (vraie) stricte ou large
2. remplacez les deux nombres par leurs cubes
3. vous obtenez une nouvelle inégalité (vraie).

Recette d'inégalité : le carré

1. Prenez une inégalité (vraie) stricte ou large **entre nombres positifs**
2. remplacez les deux nombres par leurs carrés
3. vous obtenez une nouvelle inégalité (vraie).

Exo 4

Montrez que la condition de positivité n'est pas superflue.

La recette universelle large

1. Prenez une fonction f
2. prenez un intervalle I sur lequel f est croissante
3. prenez deux nombres a et b dans I avec $a \leq b$
4. formez $f(a) \leq f(b)$, c'est une vraie inégalité.

Exemple

Je prends $f := \cos$, $I := [\pi, 2\pi]$, $a := 4$, $b := 5$ et j'obtiens $\cos 4 \leq \cos 5$.

Exo 5

Ecrire la variante avec f décroissante.

La recette universelle stricte

1. Prenez une fonction f
2. prenez un intervalle I sur lequel f est strictement croissante
3. prenez deux nombres a et b dans I avec $a < b$
4. formez $f(a) < f(b)$, c'est une vraie inégalité.

Les limites des décimales

Etant donnés deux nombres A et B, la méthode basique pour les comparer consiste bien sûr à confronter leurs développements décimaux. C'est ainsi que la calculatrice permet de conclure dans la plupart des cas. Mais c'est la galère si on tombe sur deux nombres qui ont les mêmes quinze premières décimales comme par exemple

$$A := \sin 10^{-20} + \ln(e - 10^{-20})$$

et

$$B := \sin 10^{-19} + \ln(e - 10^{-19}).$$

La méthode de comparaison universelle

Etant donnés deux nombres A et B, la méthode de comparaison universelle est la suivante

1. Trouver une fonction f et deux nombres a et b vérifiant $A = f(a)$ et $B = f(b)$
2. montrer que la fonction f est monotone sur $[a, b]$, par exemple en montrant que sa dérivée y garde un signe fixe
3. conclure par la recette universelle.

Exo 6

Comparez

$$A := \sin 10^{-20} + \ln(e - 10^{-20})$$

et

$$B := \sin 10^{-19} + \ln(e - 10^{-19}).$$