Accroissements finis

Dédou

Février 2011

L'inégalité des accroissements finis et son dessin

Théorème IAF

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(b)$:

$$f(a) + m(b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b - a).$$

Et ça se dessine grave.

Un exemple I

Je peux prendre n'importe quelle f dérivable, par exemple

$$f := x \mapsto e^x,$$

et n'importe quel $I := [a, b]$ dans $\mathrm{DD}f$, par exemple

$$a := 0, \; b := 1.$$

Un exemple II

Pour m et M, c'est plus compliqué.
Je dois d'abord calculer f', facile :

$$f' = x \mapsto e^x.$$

Et après, je dois encadrer f' sur $[0, 1]$. Comme f' est croissante, elle est encadrée par ses valeurs aux bornes 0 et 1, à savoir 1 et e. Donc pour m je peux prendre n'importe quel nombre inférieur à 1, par exemple 1, et pour M je peux prendre n'importe quel nombre supérieur à e, par exemple 3 :

$$\forall x \in [0, 1], \qquad 1 \leq f'(x) \leq 3.$$

La formule $f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$ devient

$$1 + 1 \leq e \leq 1 + 3 \;\; \text{autrement dit} \;\; 2 \leq e \leq 4.$$

Bien sûr on le savait déjà.

Exercice

Quand on applique IAF, on sait peut-être qui sont f, a et b, mais il faut choisir m et M de façon que l'hypothèse soit vérifiée.

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(b)$:

$$f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

Rappel de IAF

$$m \leq f' \leq M \Rightarrow f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a).$$

Exo 1

Encadrer $\ln 2$ en appliquant IAF à $\ln$ sur $[1, 2]$.

La variante en termes de taux

La conclusion de IAF

$$f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a)$$

peut se reformuler comme suit (en retranchant $f(a)$ aux trois termes) :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$$

ou encore (en divisant les trois termes par $b-a$ qui est bien positif) :

$$m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M.$$

Le point de vue physique

En physique, on utilise une fonction f pour représenter la position $f(x)$ d'un point mobile sur un axe en fonction du temps (x, qu'on préfère alors appeler t).

- La dérivée $f'(t)$ représente alors la vitesse de notre mobile à l'instant t ;
- le quotient $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ représente la vitesse moyenne entre les instants a et b ;
- l'hypothèse $m \leq f' \leq M$ signifie que, dans l'intervalle de temps considéré, la vitesse de notre mobile reste comprise entre m et M ;
- la conclusion $m \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq M$ signifie que la vitesse moyenne est elle aussi comprise entre m et M.

Que cette hypothèse implique cette conclusion semble "physiquement" incontestable.

Accroissements finis et approximation linéaire

Dans l'approximation linéaire on "approche" $f(b)$ par

$$f(a) + f'(a)(b - a).$$

Avec IAF, on encadre le même $f(b)$ par

$$f(a) + m(b - a) \quad \text{et} \quad f(a) + M(b - a).$$

Notez que l'hypothèse de IAF implique en particulier

$$m \leq f'(a) \leq M.$$

IAF à reculons

On a vu comment encadrer $f(b)$ en termes de $f(a)$ mais comment encadrer $f(a)$ en termes de $f(b)$? On a

$$f(a) + m(b-a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b-a) \qquad \Leftrightarrow$$

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a) \qquad \Leftrightarrow$$

$$-M(b-a) \leq f(a) - f(b) \leq -m(b-a) \qquad \Leftrightarrow$$

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a)$$

qui est l'encadrement rêvé. Ca se comprend bien sur le dessin.

L'inégalité des accroissements finis à reculons

Théorème IAF à reculons

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(b)$:

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a).$$

Et ça se dessine grave.

Exemple

Encadrons $\ln 2.7$ "en partant de $\ln e$". On prend donc

$$f := \ln,\ a := 2.7,\ b := e.$$

On a $f' = x \mapsto \frac{1}{x}$. Cette fonction est décroissante sur $[a, b]$, où elle est donc encadrée par ses valeurs aux bornes :

$$m := \frac{1}{e} \leq f' \leq \frac{1}{2.7} =: M.$$

L'inégalité des accroissement finis "à reculons"

$$f(b) - M(b-a) \leq f(a) \leq f(b) - m(b-a)$$

donne, en réduisant au même dénominateur :

$$\frac{5.4 - e}{2.7} \leq \ln 2.7 \leq \frac{2.7}{e}.$$

Exercice

Rappel de IAF à reculons

$$m \le f' \le M \Rightarrow f(b) - M(b-a) \le f(a) \le f(b) - m(b-a).$$

Exo 2

Encadrer $\sin 3$ en appliquant IAF à la fonction sinus sur $[3, \pi]$.

Preuve de IAF

On pose $g := x \mapsto f(x) - f(a) - m(x-a)$ et on calcule $g' = x \mapsto f'(x) - m$. Notre hypothèse assure que g' est positive, "donc" que g est croissante sur l'intervalle $[a,b]$. Quand on calcule $g(a) \leq g(b)$, on trouve

$$0 \leq f(b) - f(a) - m(b-a) \quad i.e. \quad f(a) + m(b-a) \leq f(b).$$

On montre la deuxième moitié de la même façon en posant $h := x \mapsto f(x) - f(a) - M(x-a)$.

Preuve de IAF

On pose $g := x \mapsto f(x) - f(a) - m(x-a)$ et on calcule $g' = x \mapsto f'(x) - m$. Notre hypothèse assure que g' est positive, "donc" que g est croissante sur l'intervalle $[a, b]$. Quand on calcule $g(a) \leq g(b)$, on trouve

$$0 \leq f(b) - f(a) - m(b-a) \quad i.e. \quad f(a) + m(b-a) \leq f(b).$$

On montre la deuxième moitié de la même façon en posant $h := x \mapsto f(x) - f(a) - M(x-a)$.

Exo 3

Faire cette deuxième moitié de preuve.