

# Linéarité de la série de Taylor

Dédou

Avril 2011

# La série de Taylor

Si on a une fonction  $f$  définie sur un intervalle ouvert  $I$  avec un point  $a$  de  $I$ , on sait ce que sont les polynômes de Taylor de  $f$  en  $a$ , ce sont les polynômes

$$x \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}.$$

Cette "série" de polynômes, qu'on appelle série de Taylor de  $f$  en  $a$ , est encodée dans la formule

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}.$$

# Le sens de la série de Taylor

Cette formule

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(a)(x-a)^i}{i!}.$$

semble bien sympathique, mais il faut cravacher pour lui donner un sens et nous n'allons pas faire ça cette année. Donc pour nous,

la série de Taylor de  $f$  en  $a$  est  $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i(x-a)^i}{i!}$

sera juste une façon compacte de dire

les DL de  $f$  en  $a$  sont les polynômes  $x \mapsto \sum_{i=0}^n \frac{c_i(x-a)^i}{i!}$ .

## Warning

On va aussi écrire des séries de Taylor qui ne sont pas sous la forme officielle  $x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i(x-a)^i}{i!}$ , parce que certains monômes manquent à l'appel et qu'on ne s'en plaint pas.

### Exemple

La série de Taylor de la fonction cosinus en 0 est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2i}}{(2i)!}.$$

Entre nous, on peut aussi écrire ça

$$x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

## Exemple

La série de Taylor de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$  en 0 est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} x^i.$$

Entre nous, on peut aussi écrire ça

$$x \mapsto 1 + x + \cdots + x^j + \cdots .$$

### Exo 1

Ecrivez la série de Taylor de la fonction exponentielle en 0.

## Série de Taylor et somme

La série de Taylor de la somme de  $f$  et  $g$  en  $a$  est la somme des séries de Taylor, à savoir

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} (f^{(i)}(a) + g^{(i)}(a)) \frac{(x-a)^i}{i!}.$$

C'est juste parce que la dérivée  $i$ -ième de la somme est la somme des dérivées  $i$ -ièmes. En termes de DL ça donne la

### Méthode

Pour calculer le DL d'une somme de deux fonctions, on calcule les DL des deux fonctions et on les ajoute.

### Exemple

La série de Taylor en 0 de  $x \mapsto e^x + \frac{1}{1-x}$  est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{i!}\right) x^i \quad \text{ou encore} \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i! + 1)x^i}{i!}.$$

## Série de Taylor et multiplication externe

La série de Taylor de  $\lambda f$  en  $a$  s'obtient en multipliant celle de  $f$  par  $\lambda$ .

### Exemple

La série de Taylor en 0 de  $x \mapsto \frac{\pi}{1-x}$  est

$$x \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \pi x^i.$$

### Exo 2

Ecrivez la série de Taylor en 0 de  $x \mapsto 3e^x$ .

## Warning : addition et multiplication externe des séries

On n'a pas défini nos séries, donc on a encore moins défini comment on les additionne, ou on les multiplie. Ca nous manque un peu mais heureusement on comprend suffisamment ce qui se passe au niveau des polynômes.

### Exo 3

Calculer le DL à l'ordre 3 en 0 de  $x \mapsto \pi \sin x$ .

## Série de Taylor et combinaisons linéaires

Comme d'hab, on sait additionner et multiplier par un nombre, donc on sait faire des combinaisons linéaires.

### Exo 4

Ecrivez la série de Taylor en 0 de  $x \mapsto 3e^x - \frac{\pi}{1-x}$ .

## Rappel sur les applications linéaires

Une application  $f : E \rightarrow F$  est dite linéaire si elle transforme les combinaisons linéaires en combinaisons linéaires au sens suivant :

$$\forall u, v \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v).$$

On meurt d'envie de dire que l'application qui à une (bonne) fonction associe sa série de Taylor en  $a$  est linéaire.

Mais pour cela, il faudrait non seulement définir nos séries de Taylor, mais encore mettre une structure d'espace vectoriel sur l'ensemble de ces séries de Taylor. On ne fera pas ça cette année. En revanche, on va le faire au niveau des DL.

# L'espace vectoriel des fonctions indéfiniment dérivables sur $I$

Un espace vectoriel est un ensemble où on sait faire des combinaisons linéaires et où ça se passe tout bien.

On fixe un intervalle ouvert  $I$ . Alors l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur  $I$  constitue un espace vectoriel pour les opérations évidentes.

## Exo 5

Rappelez quelle est cette addition des fonctions dont il est question ici.

## L'espace vectoriel des polynômes de degré au plus $n$

L'ensemble des polynômes de degré au plus  $n$  constitue lui aussi un espace vectoriel pour les opérations usuelles.

Maintenant on peut formuler de façon sophistiquée la compatibilité du DL avec les combinaisons linéaires :

### Proposition

On fixe un intervalle ouvert  $I$ , un point  $a$  de  $I$  et un entier  $n \geq 1$ . L'application qui, à une fonction indéfiniment dérivable sur  $I$ , associe son polynôme de Taylor à l'ordre  $n$  en  $a$  est linéaire.