Approximation quadratique

Dédou

Mars 2011

Rappel : les deux faces de l'approximation

L'activité d'approximation comporte deux volets :

- d'une part on identifie un procédé pour fabriquer des approximations
- d'autre part on dit ce qu'on peut dire sur l'erreur (majoration ou encadrement).

- On a fait ça pour l'approximation linéaire.
- Maintenant on va faire ça pour l'approximation quadratique.

La parabole osculatrice

Au lieu d'une droite, on prend une parabole, et au lieu de la droite tangente, on prend la "bonne" parabole, qu'on appelle parabole osculatrice.
Osculateur, c'est un mot qui vient du latin osculare.
La parabole osculatrice, ça se dessine.

L'approximation quadratique

Dans l'approximation linéaire, on approche une fonction f autour de a par la fonction affine L qui vérifie $L(a) = f(a)$ et $L'(a) = f'(a)$. On a

$$L = x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a).$$

Dans l'approximation quadratique, on approche une fonction f autour de a par le trinôme Q qui vérifie $Q(a) = f(a)$ et $Q'(a) = f'(a)$ et $Q''(a) = f''(a)$. Y'en a bien un et c'est :

$$Q := x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a) + f''(a)\frac{(x - a)^2}{2}.$$

Exemple

$$Q := x \mapsto f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2}.$$

Exemple

L'approximation quadratique de $f := x \mapsto x^3$ en $a := 1$ est

$$Q := x \mapsto 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2.$$

Exo 1

Calculer l'approximation quadratique de $f := x \mapsto x^4$ en $a := 1$

Courbure

La dérivée seconde $f''(a)$ de f en a mesure la courbure en a du graphe de f. La parabole de Taylor est donc, parmi toutes les paraboles tangentes à f en a, celle qui a aussi la même courbure que f en a.