

# Prépondérance

Dédou

Mars 2011

## Vocabulaire

Si  $f(x)$  tend vers 0 quand  $x$  tend vers  $a$ , on dit aussi que  $f(x)$  est **infiniment petit** quand  $x$  tend vers  $a$ .

Bien qu'ils soient tous petits, il y a des infiniment petits qui sont plus petits que d'autres.

L'exemple-phare est constitué par les puissances  $(x - a)^n$  qui sont de plus en plus petites quand  $n$  augmente. C'est de ça qu'on va parler comme il faut.

# Prépondérance

On dit que, quand  $x$  tend vers  $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ,  $f(x)$  est **infinitement petit** par rapport à  $g(x)$  (ou  $f(x)$  est **négligeable devant**  $g(x)$ ), ou encore  $g(x)$  est **infinitement grand** par rapport à  $f(x)$  ou enfin  $g(x)$  **prépondérant** devant  $f(x)$ ) si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On peut noter ça  $f \ll g$  ou  $f(x) \ll_{x \rightarrow a} g(x)$ .

# Prépondérances standard

## Proposition

Si  $p$  et  $q$  sont deux entiers avec  $p < q$ ,  $c$  et  $d$  deux constantes non nulles et  $a$  un réel quelconque, alors  $c(x - a)^p$  est prépondérant devant  $d(x - a)^q$  quand  $x$  tend vers  $a$ .

## Exo 1

Entre  $2(x - 1)^3$  et  $3(x - 1)^2$ , lequel est négligeable devant l'autre quand  $x$  tend vers 1 ?

# Prépondérance et Taylor

Dans un polynôme de Taylor (écrit dans le bon sens!), chaque terme (non nul) est prépondérant devant le suivant. Mais on a mieux :

## Proposition

Soit  $f$  indéfiniment fois dérivable autour de  $a$ , et  $T_n$  son polynôme de Taylor d'ordre  $n$  en  $a$ . Alors  $f(x) - T_n(x)$  est négligeable devant  $(x - a)^n$  et  $T_n$  est le seul polynôme de degré au plus  $n$  ayant cette propriété.

## Exemple

Quand  $x$  tend vers 0,  $e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}$  est négligeable devant  $x^3$ .

## Exo 2

Quand  $x$  tend vers 1, que peut-on dire de  $\sqrt{x} - 1 - \frac{x-1}{2}$  et pourquoi ?