Majorer, minorer, encadrer

Dédou

Février 2011

Encadrer un nombre par deux nombres

Face à un nombre qu'on ne connaît pas super bien, comme π, on l'encadre :

$$3.14 \leq \pi \leq 3.15$$

Cet encadrement se décompose en

$$\pi \leq 3.15$$

dont on dit que c'est une majoration (de π) et

$$3.14 \leq \pi$$

dont on dit que c'est une minoration (de π).

Le majorant et le majoré

Dans l'inégalité $\pi \leq 3.15$

3.15 est le majorant et π est le majoré. On dit aussi que 3.15 majore π.

Il y a aussi le point de vue symétrique

3.15 est le minoré et π est le minorant. On dit alors que π minore 3.15.

Le majoré ou le minoré est le nombre auquel on s'intéresse, selon le point de vue.

Encadrer une fonction par deux nombres

On encadre (majore, minore) un nombre qu'on ne connaît pas super bien, comme e.
On peut aussi encadrer (majorer, minorer) une fonction. Dans ce cas, on peut encadrer la fonction par deux nombres, ou par deux fonctions.

Exemple

La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2+1}$ est comprise entre 0 et 1.

Exo 1

Encadrer la fonction sinus (par deux nombres).

Encadrer une expression par deux nombres

Parfois, on veut encadrer (majorer, minorer) une expression dépendant d'une variable (par des nombres ne dépendant pas de cette variable).

Exemple

Pour $x \in [-1, 2]$, x^2 est compris entre -1 et 5.

Exo 2

Encadrer $x^2 + 1$ pour $x \in [-2, 3]$.

Encadrer l'expression $f(x)$ pour $x \in I$, c'est pareil qu'encadrer la fonction f (restreinte à I.

Encadrer une fonction par deux fonctions

Parfois, on veut encadrer une fonction par deux autres.

Exemple

La fonction $x \mapsto x^3 + \sin x$ est encadrée par les deux fonctions croissantes $x \mapsto x^3 - 1$ et $x \mapsto x^3 + 1$.

Exo 3

Encadrer $x \mapsto e^x \sin x$ par deux fonctions monotones.

Encadrer= majorer + minorer

Majorer et minorer, c'est pareil, au sens des inégalités près.

Majorer et minorer, c'est pareil

y'a que le sens de l'inégalité qui change.

Si on sait majorer, on sait minorer,

et comme "encadrer" c'est "majorer" plus "minorer", on sait aussi encadrer.

On va donc surtout parler de "majorer", mais il faudra savoir adapter à "minorer".

Majorer versus comparer

La différence entre majorer et comparer, c'est qu'on a deux nombres (ou fonctions) dans le second cas, et un seul dans le premier.

Majorer A, c'est

d'abord trouver/choisir M puis prouver $A \leq M$.

Majorer une fonction

Pour majorer une fonction (par un nombre), on peut regarder son tableau de variations et éventuellement conclure.

Exemple

Une fonction f ayant le TV suivant est majorée par 70.

$$
\begin{array}{|c|ccccccccc|}
\hline
x & -\infty & & -7 & & 3 & & 4 & & +\infty \\
\hline
 & & & 4 & & & & 66 & & \\
f(x) & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & 2 & & & & -7 & & & & 1 \\
\hline
\end{array}
$$

Exo 4

Minorer la fonction précédente au vu de son TV.

Plus petit majorant

x	$-\infty$		-7		3		4		$+\infty$
$f(x)$	2	$\nearrow$	4	$\searrow$	-7	$\nearrow$	66	$\searrow$	1

Au vu du TV ci-dessus

dire que la fonction est majorée par 70 c'est juste mais débile.

La bonne info, c'est que son plus petit majorant est 66.

Exo 5

Quel est le plus grand minorant de cette fonction ?

Majorants et opérations

Proposition

- Si M est un majorant de f et N un majorant de g, alors $M+N$ est un majorant de $f+g$.
- Si M est un majorant de f et N un majorant de g, **avec** f **et** g **positives**, alors MN est un majorant de fg.
- Si M est un majorant de f et N un **minorant strictement positif** de g, **avec** f **et** g **strictement positives**, alors $\frac{M}{N}$ est un majorant de $\frac{f}{g}$.
- Si M est un majorant de f, alors $-M$ est un minorant de $-f$.

Majorer une somme

Pour majorer $f + g$,

on majore f et g , puis on ajoute les majorants.

Exemple

Pour majorer $x^2 + \sin x$ avec $x \in [-3, 2]$, je majore x^2 par 9 et $\sin x$ par 1, et je conclus que la somme est majorée par 10.

Exo 6

Majorer $x^2 + x^3$ avec $x \in [-4, 1]$.

Majorer un produit de positifs

Pour majorer fg, avec f et g positives,

on majore f et g , et on multiple les majorants.

Exemple

Pour majorer $x^2 e^x$ avec $x \in [-3, 2]$, je majore x^2 par 9 et e^x par $3^2 = 9$, et je conclus que le produit est majoré par 81.

Exo 7

Majorer $(x + \sin x)(7 - x)$ avec $x \in [2, 4]$.

Majorer un produit quelconque

Pour majorer fg, avec f et g quelconques,

on utilise que fg est majoré par sa valeur absolue $|fg|$ qui est aussi le produit de positifs $|f|.|g|$.

Exemple

Pour majorer $x^2 \sin x$ avec $x \in [-3, 2]$, je majore x^2 (qui est positif donc égal à sa valeur absolue) par 9 et $|\sin x|$ par 1, et je conclus que le produit $x^2 \sin x$ est majoré par 9.

Exo 8

Majorer $e^x \cos x$ avec $x \in [-3, 2]$.

Majorer une valeur absolue

Il faut donc savoir majorer une valeur absolue, et en particulier la valeur absolue d'une somme ou d'une différence.

Pour majorer $|f+g|$ ou $|f-g|$,

on majore $|f|$ et $|g|$, puis on ajoute les majorants (même pour $|f-g|$).

Exemple

Pour majorer $x^2 \sin x$ avec $x \in [-3, 2]$, je majore x^2 (qui est positif donc égal à sa valeur absolue) par 9 et $|\sin x|$ par 1, et je conclus que le produit $x^2 \sin x$ est majoré par 9.

Exo 8

Majorer $e^x \cos x$ avec $x \in [-3, 2]$.

Majorer une différence

Pour majorer $f - g$,

on majore f, on minore g , puis on retranche le minorant de g au majorant de f.

Exemple

Pour majorer $x^3 - \sin x$ avec $x \in [2, 3]$, je majore x^3 par 27 et je minore $\sin x$ par -1, et je conclus que la différence est majorée par 28.

Exo 9

Majorer $7\cos 5x - 5\sin 7X$ avec $x \in [-100, 100]$.

Majorer un quotient de positifs

Pour majorer $\frac{f}{g}$, avec f et g positives,

on majore f ; on minore g , et on divise le majorant de f par le minorant de g.

Exemple

Pour majorer $\frac{7+x}{5+\cos x}$ avec $x \in [2,5]$, je majore $7+x$ par 12 et je minore $5+\cos x$ par 4, et je conclus que le quotient est majoré par 3.

Exo 10

Majorer $\frac{3+2\sin x}{4-2\cos x}$ avec $x \in [2,4]$.

Minorer

Pour minorer fg par un nombre strictement positif, avec f et g strictement positives,

on minore f et g par des nombres strictement positifs, et on multiplie les deux minorants trouvés.

Exo 11

Donner la recette pour minorer une différence.

Les accroissements finis

Pour finir, on donne la formule des accroissements finis, qui est une sorte d'encadrement universel.

Théorème

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a l'encadrement suivant de $f(b)$:

$$f(a) + m(b - a) \leq f(b) \leq f(a) + M(b - a).$$

Ca se dessine grave et on va y revenir.