Limites

Dédou

Mars 2011

Evaluer Taylor

On veut dire que l'approximation de Taylor est d'autant meilleure que n augmente, et que x se rapproche de a. Pour le moment, cette phrase n'a aucun sens précis, et on va lui en donner un, qui reposera sur la notion de limite et deux notions qui en découlent, celle d'équivalence et celle de prépondérance. Pour le moment on révise un peu les limites.

Carte de visite de la limite

Notre construction lim attend une fonction f et un nombre a et retourne (pas toujours) un réel.
La fonction f n'est pas forcément partout définie, le nombre a peut être infini, ainsi que la limite, ce qu'on résume en écrivant :

$$\begin{array}{rccc} \lim : & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \overline{\mathbb{R}} & \to & \overline{\mathbb{R}}_\perp \\ & (f, a) & \mapsto & \lim_{x \to a} f(x). \end{array}$$

Il y a une définition avec des epsilons...

Vocabulaire

Au lieu de
"on a $\lim_{x \to a} f(x) = L$"
on prefère dire
" $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a"
bien que
" $f(x)$ tend vers L" et "x tend vers a"
n'aient pas de sens séparément.

Les variantes latérales

Parfois on ne s'intéresse qu'à certaines valeurs de x et pas à toutes, il faut alors préciser aussi l'intervalle, ou plus généralement la partie de $\mathbb{R}$, dans laquelle x varie. Les deux cas principaux sont ceux où x reste "à gauche" ou "à droite" de a :

$$\begin{array}{rccc} \lim_g : & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \mathbb{R} & \to & \overline{\mathbb{R}}_\perp \\ & (f, a) & \mapsto & \lim_{x \to a^-} f(x). \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \lim_d : & (\mathbb{R} \to \mathbb{R}_\perp) \times \mathbb{R} & \to & \overline{\mathbb{R}}_\perp \\ & (f, a) & \mapsto & \lim_{x \to a^+} f(x). \end{array}$$

Ces deux limites ont aussi des définitions avec des epsilons.

Les règles de calcul des limites

On va faire le tour des quelques règles de calcul pour les limites. Ce sont

- la règle du gendarme
- la règle du produit par borné
- les règles pour les opérations
- les règles pour la composition.

La règle du gendarme

Le gendarme

Si, sur DDf, on a $|f| \leq g$ et si $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, alors on a aussi $\lim_{x \to a} f(x) = 0$.

Exemple

Prenons $g := x \mapsto \sqrt{x}$ et $f := x \mapsto \sqrt{x} \cos x$.
On sait que $g(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 et on a $|f| \leq g$.
On en déduit que $f(x)$ tend aussi vers 0 quand x tend vers 0 .

Exo 1

Expliquez pourquoi $x \mapsto \frac{\sin^2 x}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

La règle du produit par borné

Le produit par une fonction bornée

Si on a $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ et si, sur DDf, g est bornée, alors on a aussi $\lim_{x \to a} f(x)g(x) = 0$.

Exemple

Prenons $f := x \mapsto \sqrt{x}$ et $g := x \mapsto \sin x + 3\cos x$.
On sait que fx tend vers 0 quand x tend vers 0 et on montre facilement que f est bornée. On en déduit que le produit $(\sin x + 3\cos x)\sqrt{x}$ tend aussi vers 0 qaund x tend vers 0.

Exo 2

Expliquez pourquoi $x \mapsto \frac{\cos x + 9e^{-x}}{x}$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.

Les règles pour les opérations

Proposition

Soient f et g deux fonctions ayant le même domaine de définition. On suppose que f tend vers L et que g tend vers M quand x tend vers a. Alors, quand x tend vers a,

- $f(x) + g(x)$ tend vers $L + M$;
- $f(x)g(x)$ tend vers LM ;
- si de plus M est non nul, $\frac{f(x)}{g(x)}$ tend vers $\frac{L}{M}$.

Les règles pour la composition

Comme d'habitude il faut surtout savoir composer avec nos cinq fonctions de base.

Proposition

On suppose que f tend vers L quand x tend vers a. Alors, quand x tend vers a,

- $\cos f(x)$ (resp. $\sin f(x)$, $e^{f(x)}$) tend vers $\cos L$ (resp. $\sin L$, e^L) ;
- si n est un entier naturel, $f(x)^n$ tend vers L^n ;
- si L est positif, pour tout réel $a > 0$, $f(x)^a$ tend vers L^a ;
- si L est strictement positif, pour tout exposant $a < 0$, $f(x)^a$ tend vers L^a.

Exemples

Exemple

Quand x tend vers 0, $\frac{\sin x}{x}$ tend vers 1, et donc $\cos(\frac{\sin x}{x})$ tend vers $\cos 1$.

Exo 3

Quelle est la limite quand x tend vers 0 de $\sin(\frac{\sin x}{x})$?