

Propagation de la continuité

Dédou

Mars 2011

Recettes traditionnelles de fonctions

- Choisir trois nombres a, b, c et former le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$.
- Choisir deux fonctions et former la somme (variantes : la différence, le produit, le quotient).
- Choisir une fonction et former son logarithme (variantes : son exponentielle, son cosinus, son sinus).
- Choisir une fonction et un nombre a , et élever la fonction à la puissance a .

Recettes traditionnelles et continuité

"Avec des ingrédients continus, on fabrique des fonctions continues."

- Etant donnés trois nombres a, b, c , le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est continu.
- La somme, la différence, le produit et le quotient de deux fonctions continues sont des fonctions continues.
- Le logarithme, l'exponentielle, le cosinus et le sinus d'une fonction continue sont des fonctions continues.
- Toutes les puissances d'une fonction continue sont des fonctions continues.

"Avec des ingrédients continus, on fabrique des fonctions continues." Ca se prouve :

- Le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est dérivable, donc continu....
- Pour les combinaisons linéaires, le produit et le quotient, il y a trois preuves ; j'en ferai une à la panne.
- Pour le logarithme, l'exponentielle, le cosinus et le sinus et les puissances, c'est une affaire de composition, gouvernée par le théorème suivant.

Théorème

La composée de deux fonctions continues est continue.

Et bien sûr, ça se démontre grave.

"Avec des ingrédients continus, on fabrique des fonctions continues." Ca s'invoque.

Exemple

Pour justifier que la fonction $x \mapsto 3 \sin(3x + 1) - \pi(\ln x)^e$, est continue, on dit que c'est une combinaison linéaire de $f := x \mapsto \sin(3x + 1)$ et de $g := x \mapsto (\ln x)^e$. Après quoi, il reste à montrer que f et g sont elles-mêmes continues, la première comme sinus du binôme $x \mapsto 3x + 1$ et la seconde comme puissance de la fonction \ln .

Exo 1

Justifiez la continuité de la fonction $x \mapsto \pi e^{\sin x} - 2 \cos x \ln x$.

Une recette exotique : les fonctions schizoéphrènes

La recette schizoéphrène

Prenez deux fonctions f et g à valeurs réelles, et une fonction C à valeurs booléennes, et formez la fonction

$$x \mapsto \text{si } C(x) \text{ alors } f(x) \text{ sinon } g(x).$$

Exemple

En prenant

$f := x \mapsto 2x + 1$, $g := x \mapsto \cos x$, et $C := x \mapsto x > 3$, on obtient :

$$x \mapsto \text{si } x < 3 \text{ alors } 2x + 1 \text{ sinon } \cos x.$$

Exo 2

Formez une autre fonction schizoéphrène.

Continuité des fonctions schizoéphrènes

Proposition

Si f et g sont définies et continues dans un intervalle autour de a , et si $C(x)$ est de l'une des quatre conditions

$$x < a, \quad x \leq a, \quad x > a, \quad x \geq a$$

alors la fonction $x \mapsto$ si $C(x)$ alors $f(x)$ sinon $g(x)$

a) est continue sauf peut-être en a .

b) est continue en a ssi on a $f(a) = g(a)$.

Ca se voit bien sur le dessin.

Exo 3

Est-ce que la fonction $x \mapsto$ si $x < 2$ alors $2x - 1$ sinon $x + 3$ est continue? Pourquoi?