Equivalence et prépondérance

Dédou

Mars 2011

CNS d'équivalence

Proposition

Pour que f soit équivalente à g, il faut et il suffit que $f - g$ soit négligeable devant f (ou devant g.

Exemple

Quand x tend vers 2, $3(x-2)^2 + 5(x-2)^4$ est équivalent à $3(x-2)^2$ parce que la différence $5(x-2)^4$ est négligeable devant $3(x-2)^2$.

Exo 1

Pour x tendant vers 3, donner un équivalent simple de $3(x-3)^3 + 5(x-2)^2$. Justifier.

Faux Taylors

Exemple

Pour x tendant vers 0, $e^x - 1 - x - x^2 - x^3$ s'écrit $-(1/2)x^2 + (e^x - 1 - x - (1/2)x^2) - x^3$ et s'obtient en ajoutant à $-(1/2)x^2$ deux termes négligeables devant lui ; on en déduit que $e^x - 1 - x - x^2 - x^3$ est équivalent à $-(1/2)x^2$.

Exo 2

Donnez un équivalent simple quand x tend vers 0 de $\sin x - x + x^2$.

Warning

Dans les mêmes conditions, a-t-on

$$f(x) \sim_{x \to a} f(a) + f'(a)(x-a)?$$

Oui mais c'est débile, ça ne porte pas le sens qu'on pourrait croire, ce n'est pas plus vrai que

$$f(x) \sim_{x \to a} f(a) + 3f'(a)(x-a)$$

(sauf si $f(a) = 0$).

La série de Taylor

Pour ce qu'on a à faire et dire, il est commode de considérer, au lieu de la série des polynômes de Taylor, la "série" des monômes de Taylor

$$\dots, f^{(n)}(a)\frac{(x-)^n}{n!}, \dots$$

qu'on appellera série de Taylor de f en a.

Equivalence et Taylor

Proposition

Pour f indéfiniment dérivable en a, quand x tend vers a,
a) $f(x)$ est équivalent au premier terme non nul de sa série de Taylor en a ;
b) en particulier, avec la notation évidente, $f(x) - T_n(x)$ est équivalent au premier terme non nul du reste de la série de Taylor.

Exemple

$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim_{x \to 0} \frac{x^3}{6}$.

Exo 2

Donnez un équivalent simple, pour x tendant vers 0 de $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$.