

Equivalence

Dédou

Mars 2011

Définition de l'équivalence

Définition

On dit que, quand x tend vers $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $f(x)$ est équivalent à $g(x)$ (ou $f(x)$ est équivalent à $g(x)$) si

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On peut noter ça

$$f(x) \sim_{x \rightarrow a} g(x),$$

ou, en sous-entendant a ,

$$f \sim g.$$

L'exemple-phare

Proposition

Pour f dérivable en a avec $f'(a)$ non nul, on a

$$f(x) - f(a) \sim_{x \rightarrow a} f'(a)(x - a).$$

Exemple

$$\sin x \sim_{x \rightarrow 0} x.$$

Exo 1

Donnez un équivalent simple de $\ln x \ln 2$ quand x tend vers 2.

Warning

Dans les mêmes conditions, a-t-on

$$f(x) \sim_{x \rightarrow a} f(a) + f'(a)(x - a)?$$

Oui mais c'est débile, ça ne porte pas le sens qu'on pourrait croire, ce n'est pas plus vrai que

$$f(x) \sim_{x \rightarrow a} f(a) + 3f'(a)(x - a)$$

(sauf si $f(a) = 0$).

La série de Taylor

Pour ce qu'on a à faire et dire, il est commode de considérer, au lieu de la série des polynômes de Taylor, la “série” des monômes de Taylor

$$\dots, f^{(n)}(a) \frac{(x-a)^n}{n!}, \dots$$

qu'on appellera série de Taylor de f en a .

Equivalence et Taylor

Proposition

Pour f indéfiniment dérivable en a , quand x tend vers a ,

a) $f(x)$ est équivalent au premier terme non nul de sa série de Taylor en a ;

b) en particulier, avec la notation évidente, $f(x) - T_n(x)$ est équivalent au premier terme non nul du reste de la série de Taylor.

Exemple

$$e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} \sim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{6}.$$

Exo 2

Donnez un équivalent simple, pour x tendant vers 0 de

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Équivalence et prépondérance

Proposition

Pour que f soit équivalente à g , il faut et il suffit que $f - g$ soit négligeable devant f (ou devant g).

Exemple

Quand x tend vers 2, $3(x - 2)^2 + 5(x - 2)^4$ est équivalent à $3(x - 2)^2$ parce que la différence $5(x - 2)^4$ est négligeable devant $3(x - 2)^2$.

Exo 3

Pour x tendant vers 3, donner un équivalent simple de $3(x - 3)^3 + 5(x - 2)^2$. Justifier.

Exemple

Pour x tendant vers 0, $e^x - 1 - x - x^2 - x^3$ s'écrit $-(1/2)x^2 + (e^x - 1 - x - (1/2)x^2) - x^3$ et s'obtient en ajoutant à $-(1/2)x^2$ deux termes négligeables devant lui ; on en déduit que $e^x - 1 - x - x^2 - x^3$ est équivalent à $-(1/2)x^2$.

Exo 4

Donnez un équivalent simple quand x tend vers 0 de $\sin x - x + x^2$.