Encadrer avec IAF

Dédou

Février 2011

Le problème

On nous donne une fonction "abstraite" f dérivable sur l'intervalle $I := [1, 7]$ avec

$$f(1) = 2,\ f(7) = 3 \quad \text{et} \quad -1 \leq f' \leq 3.$$

Que peut-on dire des bornes de f ?

D'abord ça se dessine.

On majore

On prend x dans $[1, 7]$ et on applique IAF sur $[1, x]$.

$f(b) \leq f(a) + M(b - a)$ devient

$$f(x) \leq 2 + 3(x - 1) = 3x - 1.$$

Ensuite on applique IAF à reculons sur $[x, 7]$:

$f(a) \leq f(b) - m(b - a)$ devient

$$f(x) \leq 3 + 7 - x = 10 - x.$$

D'où la majoration (dessin indispensable)

$$f(x) \leq \min(3x - 1, 10 - x).$$

Le min et le max de deux fonctions linéaires

Maintenant je veux mieux comprendre la fonction majorante $x \mapsto \min(3x-1, 10-x)$ que j'ai trouvée. J'observe l'équivalence

$$3x - 1 \leq 10 - x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{11}.$$

Donc pour x plus petit que $\frac{4}{11}$, $\min(3x-1, 10-x)$ vaut $3x-1$ et pour x plus grand, $\min(3x-1, 10-x)$ vaut $10-x$.
Autrement dit notre fonction majorante est la fonction (dessin)

$$x \mapsto \quad \text{si} \quad x \leq 11/4 \quad \text{alors} \quad 3x-1 \quad \text{sinon} \quad 10-x.$$

Le min et le max de deux fonctions linéaires

Maintenant je veux mieux comprendre la fonction majorante $x \mapsto \min(3x - 1, 10 - x)$ que j'ai trouvée. J'observe l'équivalence

$$3x - 1 \leq 10 - x \quad \Leftrightarrow \quad x \leq \frac{4}{11}.$$

Donc pour x plus petit que $\frac{4}{11}$, $\min(3x - 1, 10 - x)$ vaut $3x - 1$ et pour x plus grand, $\min(3x - 1, 10 - x)$ vaut $10 - x$.
Autrement dit notre fonction majorante est la fonction (dessin)

$$x \mapsto \quad \text{si} \quad x \leq 11/4 \quad \text{alors} \quad 3x - 1 \quad \text{sinon} \quad 10 - x.$$

Exo 1

Calculer la fonction $x \mapsto \max(2x + 1, 5x - 2)$.

Le max du min de deux fonctions linéaires

Le max de cette fonction majorante :

$$x \mapsto \quad \text{si} \quad x \leq 11/4 \quad \text{alors} \quad 3x - 1 \quad \text{sinon} \quad 10 - x$$

est atteint pour $x = 11/4$ et c'est $29/4$. On en déduit l'inégalité

$$f \leq 29/4 \quad \text{sur} \quad I.$$

ou encore

$$\sup f \leq 29/4.$$

Le max du min de deux fonctions linéaires

Le max de cette fonction majorante :

$$x \mapsto \quad \text{si} \quad x \leq 11/4 \quad \text{alors} \quad 3x - 1 \quad \text{sinon} \quad 10 - x$$

est atteint pour $x = 11/4$ et c'est $29/4$. On en déduit l'inégalité

$$f \leq 29/4 \quad \text{sur} \quad I.$$

ou encore

$$\sup f \leq 29/4.$$

Exo 2

Calculer le max de la fonction $x \mapsto \min(2x + 1, 7 - x)$.

Qui dit mieux ?

$$\sup f \leq 29/4.$$

Est-ce qu'on peut faire mieux que ça ?
Oui, un tout petit peu : on peut montrer

$$\sup f < 29/4.$$

En effet f ne peut pas atteindre la valeur $29/4$. Si elle l'atteignait, ça ne pourrait être qu'en $11/4$, et ça obligerait f à être égale à g (parallélogrammes aplatis).
Comme par ailleurs f atteint son maximum (comme toute fonction continue sur un intervalle fermé borné), on a

$$\sup f = \max f < 29/4.$$

Pas mieux !

La majoration

$$\sup f < 29/4$$

est la meilleure possible.
En effet, on peut trouver des fonctions f avec un max arbitrairement proche de $29/4$ (faire monter une petite bulle le plus haut possible dans le parallélogramme et "contourner" la bulle), mais l'expliquer rigoureusement est assez compliqué.