Développements limités et Taylor, même combat

Dédou

Avril 2011

DL et Taylor

Vocabulaire

Si f est une fonction indéfiniment dérivable dans un intervalle autour de a, son développement limité à l'ordre n en a n'est autre que son polynôme de Taylor d'ordre n en a.

On peut définir un développement limité (DL) pour des fonctions plus générales, mais cette extension ne nous concerne pas ici. On introduit donc seulement un nouveau nom pour une notion déjà connue.

Exo 1

Quel est le DL à l'ordre 4 de la fonction exponentielle en 0 ?

DL et prépondérance

La propriété caractéristique

Soit f une bonne fonction et T son DL à l'ordre n en a. Alors, quand x tend vers a, la différence $f(x) - T(x)$ est négligeable devant $(x-a)^n$.

Exo 2

Explicitez ce fait en termes de limite dans le cas de la fonction exponentielle et de son DL de l'exo précédent.

Exemple

Le DL à l'ordre n en 0 de $f := x \mapsto \frac{1}{1-x}$ est

$$T := x \mapsto 1 + x + \cdots + x^n.$$

En effet, on vérifie qu'on a $f(x) - T(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$ qui est bien négligeable devant x^n quand n tend vers 0.

Exo 3

Ecrivez le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

La notation o

Au lieu d'écrire que la différence $f(x) - T(x)$ est négligeable devant $(x-a)^n$, on écrit

$$f(x) - T(x) = o((x-a)^n)$$

et même

$$f(x) = T(x) + o((x-a)^n).$$

C'est-à-dire qu'on fait la convention que $o(f)$ désigne un infiniment petit négligeable devant f, sans qu'on ait besoin de préciser qui est cet infiniment petit à chaque fois.

L'exemple revisité

Quand x tend vers 0, on a, pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n).$$

Exo 4

Ecrivez sous ce format le DL à l'ordre 2 en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

DL et équivalence

Proposition

Soit f une bonne fonction avec $f^{(n)}(a)$ non nul, et T son DL à l'ordre $n-1$ en a. Alors, quand x tend vers a, la différence $f(x) - T(x)$ est équivalente à $f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$.

Exemple

On a, pour tout $n \geq 1$:

$$e^x - 1 - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \sim \frac{x^n}{n!}.$$

Exo 5

Ecrivez (sans points de suspension) la formule précédente pour $n := 3$.

Warning : le cas spécial

Soit maintenant f une bonne fonction avec $f^{(n)}(a) = 0$, et T son DL à l'ordre $n-1$ en a. Alors, quand x tend vers a, la différence $f(x) - T(x)$, à moins d'être plus ou moins nulle, ne peut pas être équivalente à $f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!}$ qui est nul. Pour remédier à ça, il faut continuer le développement.

Exemple

On prend pour f la fonction cosinus. Son DL à l'ordre 2 en 0 est $T_2 := x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$. On a $f'''(0) = 0$, ce qui signifie que T_2 est aussi le DL de f à l'ordre 3 en 0 et comme la dérivée quatrième $f^{(4)}(0)$ n'est pas nulle, on obtient (pour x tendant vers 0) :

$$\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \sim \frac{x^4}{24}.$$

Calculs de Taylor

Pour calculer le polynôme de Taylor (ou le DL) d'ordre n de f en a, normalement, on doit seulement calculer les dérivées (jusqu'à la n-ième) de f en a. Mais pour calculer la dérivée n-ième de f en a, il faut calculer la dérivée $(n-1)$-ième de f en x et pas seulement en a. L'objet du chapitre est de découvrir des méthodes permettant de calculer le DL (ou le polynôme de Taylor) sans calculer toutes les fonctions dérivées. Ce chapitre n'apporte donc rien à la logique de l'approximation de Taylor si ce n'est qu'il met en évidence la grande compatibilité de cette approximation avec les opérations standard sur les fonctions.