Fonctions discontinues

Dédou

Mars 2011

Négation

Tout énoncé A a une **négation** $\overline{A}$ qui est l'énoncé "opposé".

Si un énoncé est vrai, sa négation est fausse, et vice-versa.

En particulier la négation de l'énoncé Vrai est l'énoncé Faux.

Pour les autres énoncés, il y a d'autres règles qui permettent de calculer la négation. On va faire le tour de ces règles.

Négation d'une égalité

La négation de $x = y$ est notée $x \neq y$.

$$\overline{x = y} = y \neq x.$$

Ici x et y doivent être du même type (réel, fonction, ...).

Exemple

Exemple

La négation de $\sqrt{x^2} = x$ est $\sqrt{x^2} \neq x$.

Négation d'une inégalité

La négation de $x \leq y$ est $y < x$.

$$\overline{x \leq y} = y < x.$$

Et vice-versa :

$$\overline{x < y} = y \leq x.$$

Ici x et y doivent être des nombres réels.

Négation d'un "et" ou d'un "ou"

La négation de A et B est $\overline{A}$ ou $\overline{B}$:

$$\overline{A \text{ et } B} = \overline{A} \text{ ou } \overline{B}.$$

Et vice-versa :

$$\overline{A \text{ ou } B} = \overline{A} \text{ et } \overline{B}.$$

Ici A et B doivent être des énoncés.

Exercice

Exo 1

Calculer la négation de A et $(B$ ou $C)$.

Négation d'un "implique"

L'énoncé $A \Rightarrow B$ est un raccourci pour $\overline{A}$ ou B.

La négation de $A \Rightarrow B$ est donc A et $\overline{B}$:

$$\overline{A \Rightarrow B} = A \text{ et } \overline{B}.$$

Exo 2

Calculer la négation de $(A \text{ ou } B) \Rightarrow (A \text{ et } B)$.

Négation d'un "quelque soit"

La négation de $\forall x \in E, A$ est $\exists x \in E, \overline{A}$:

$$\overline{\forall x \in E, A} = \exists x \in E, \overline{A} .$$

Et vice-versa :

$$\overline{\exists x \in E, A} = \forall x \in E, \overline{A} .$$

Exemple

La négation de $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = f(-x)$ est $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(-x)$.

Exo 3

Calculer la négation de $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$.

Fonction discontinue

Définition

La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est discontinue en a, si elle n'y est pas continue, c'est-à-dire si
$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R},$

$$|x - a| < \eta \qquad \text{et} \qquad |f(x) - f(a)| \geq \epsilon.$$

Rappel de la continuité

$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R},$

$$|x - a| < \eta \qquad \Rightarrow \qquad |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Exemple

Montrons que la fonction "partie entière" E est discontinue en 1.

Rappel de la discontinuité

$\exists \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, \forall \eta \in \mathbb{R}_+^*, \exists x \in \mathbb{R},$

$$|x-1| < \eta \qquad \text{et} \qquad |E(x)-1| \geq \epsilon.$$

On doit donner ϵ et on donne $\epsilon := \frac{1}{2}$. Et après, pour tout η, on doit donner x, on donne $x := 1 - \frac{\eta}{2}$. Et on doit vérifier

$$|x-1| < \eta \qquad \text{et} \qquad |E(x)-1| \geq \epsilon.$$

Les deux sont faciles (bien voir que $E(x)$ est négatif ou nul).
On aurait même pu prendre $\epsilon := 1$.