Convexité

Dédou

Mars 2011

Rappel : sens de variation

Un truc qu'on a bien compris, c'est que le sens de variation de f parle de l'ordre entre $f(x)$ et $f(y)$ comme fonction de l'ordre entre x et y.

Et aussi que, si f est dérivable, son sens de variation est gouverné par le signe de sa dérivée.

Exo 1

Rappeler la définition de fonction strictement croissante.

Exemples

La fonction carré et la fonction exponentielle sont convexes : leur concavité est tournée vers le haut.

La fonction racine carrée et la fonction logarithme sont concaves : leur concavité est tournée vers le bas.

La fonction sinus et la fonction cosinus ne sont ni convexes ni concaves.

Tout ça se dessine.

Définition de la convexité

La convexité d'une fonction f, ça nous parle du sens de variation de son taux de variation.

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est convexe si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ca se dessine grave et ça dit que

"entre deux points quelconques la fonction reste sous la corde".

Définition de la concavité

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est concave si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \quad x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \geq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Ca se dessine presque pareil et ça dit que

"entre deux points quelconques (x et z),
la fonction est au-dessus de la corde."

Définitions strictes

Définition

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On dit que f est strictement convexe si

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}, \;\; x < y < z \quad \Rightarrow \quad \frac{f(y) - f(x)}{y - x} < \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Exo 2

Donner la définition de fonction strictement concave.

La convexité des fonctions partielles

Si f n'est pas partout définie, on arrange le coup avec son domaine de définition.

Définition

Soit f une fonction quelconque. On dit que f est convexe si

$$\forall x, y, z \in DDf, \;\; x < y < z \;\; \Rightarrow \;\; \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

La convexité locale

La fonction sinus n'est ni concave ni convexe, pas plus qu'elle n'est croissante ou décroissante.

Mais de la même façon qu'elle est croissante sur certains intervalles et décroissantes sur d'autres, elle est convexe sur certains intervalles et concave sur d'autres.

Définition

Soit f une fonction quelconque. On dit que f est convexe sur une partie I de son domaine de définition si

$$\forall x, y, z \in I, \;\; x < y < z \;\; \Rightarrow \;\; \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}.$$

Exemple

La fonction cosinus est concave sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Exo 3

Donnez un intervalle où la fonction cosinus est croissante et concave.

Critère infinitésimal de convexité

La convexité des fonctions (une ou deux fois) dérivables est gouvernée par le sens de variation de la première dérivée, ou le signe de la dérivée seconde.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
a) f est convexe sur I ssi sa dérivée première y est croissante.
b) Si f est deux fois dérivable, alors f est convexe sur I ssi sa dérivée seconde y est positive.

Ca se démontre mais bon...

Exo 4

Ecrire le critère infinitésimal de concavité.

Critère infinitésimal de stricte convexité

Pour la stricte convexité, on a une condition suffisante et une CNS.

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
a) f est strictement convexe ssi f' est strictement croissante.
b) Si f est deux fois dérivable et si sa dérivée seconde est strictement positive sur I, alors f y est strictement convexe.

Exemples

Le trinôme $x \mapsto ax^2 + bx + c$ est strictement convexe pour a strictement positif et strictement concave pour a strictement négatif.

La fonction $x \mapsto x^4$ est strictement convexe puisque sa dérivée est strictement croissante.

Exo 5

Pour quelles valeurs du paramètre m la fonction $f := x \mapsto 2x^2 + m \sin x$ est-elle strictement convexe ?

Convexité et tangentes

Proposition

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors f est convexe ssi f majore toutes ses linéarisées.

Ca se démontre et surtout ça se dessine.

Approximation linéaire et convexité

Proposition

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I avec $a \in I$.
Si f'' est positive sur I, alors, sur I, f majore sa linéarisée en a.
Si f'' est négative sur I, alors, sur I, f minore sa linéarisée en a.

Ca se démontre et surtout ça se dessine.

Exemple

La dérivée seconde de la fonction $f := x \mapsto x^3$ ests positive sur $I :=]0, +\infty[$. et donc, sur I, f majore sa linéarisée en 1 qui est $x \mapsto 1 + 3(x - 1)$.

Exo 6

Comparer la fonction sinus à sa linéarisée en $a := \frac{\pi}{4}$ dans un intervalle autour de a.