Contrôler une fonction

Dédou

Février 2011

Rappel : l'inégalité des accroissements finis

Théorème IAF

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ avec $a < b$ et m et M deux nombres réels. On suppose

$$m \leq f' \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a l'encadrement suivant :

$$m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a).$$

La version symétrique des accroissements finis

Dans cette variante, on ne suppose pas $a < b$:

Théorème IAF

Soit f dérivable sur $I := [a, b]$ et M un nombre réel. On suppose

$$|f'| \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors on a la majoration suivante

$$|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|.$$

La même avec x et y

Théorème IAF

Soit f dérivable sur l'intervalle I et M un nombre réel. On suppose

$$|f'| \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors, pour x et y quelconques dans I, on a la majoration suivante

$$|f(y) - f(x)| \leq M|y - x|.$$

La même avec a et x

Théorème IAF

Soit f dérivable sur l'intervalle I et M un nombre réel et a un point de I. On suppose

$$|f'| \leq M \quad \text{sur} \quad I.$$

Alors, pour x quelconque dans I, on a la majoration suivante

$$|f(x) - f(a)| \leq M|x - a|.$$

Rappel sur inégalités et valeur absolue

L'inégalité $|b - a| \leq M$ équivaut à la double inégalité

$$a - M \leq b \leq a + M$$

Et aussi à la double inégalité

$$b - M \leq a \leq b + M$$

L'idée de continuité

On voudrait dire que

La fonction f est continue en a ssi elle vérifie la condition :

si x tend vers a, alors $f(x)$ tend vers $f(a)$.

Malheureusement cette définition est illicite parce qu'on ne sait pas donner un sens à

$$x \text{ tend vers } a$$

pas plus qu'à

$$f(x) \text{ tend vers } f(a).$$

Comment attribuer un sens ?

Qu'entend-on par un sens (par exemple pour "x tend vers a") ? C'est un énoncé mathématique formel comportant deux variables a et x de type réel.

Tentative

On peut essayer de définir x tend vers a comme

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R}_+^*, |x - a| \leq \epsilon,$$

qui semble exprimer que la différence est aussi petite qu'on veut. Mais ça ne va pas puisque cet énoncé implique $x = a$.

Les énoncés formels

A côté des nombres (réels) et des fonctions, on a donc un troisième type d'objets mathématiques, les énoncés.
Le langage des énoncés est beaucoup beaucoup plus restreint que par exemple le français. En première approximation, nos recettes pour fabriquer des énoncés sont les suivantes :

- Vrai et Faux sont deux énoncés
- si u et v sont de même type, alors $u = v$ et $u \neq v$ sont des énoncés
- si u et v sont deux réels, alors $u < v$ et $u \leq v$ sont des énoncés
- si A et B sont des énoncés, alors $A \text{ et } B$, $A \text{ ou } B$, $A \Rightarrow B$ aussi
- si E est un ensemble et A est un énoncé (dépendant d'une variable x de type E), alors $\forall x \in E, A$ et $\exists x \in E, A$ sont des énoncés.

Il va falloir se débrouiller avec ça...

La continuité des fonctions à dérivée bornée I

Exemple

La fonction $f := x \mapsto 5x + \sin \pi x$ est dérivable et sa dérivée est bornée. En effet

$$f' := x \mapsto 5 + \pi \sin \pi x$$

vérifie

$$5 - \pi \leq f' \leq 5 + \pi \quad \text{et donc en prenant de la marge} \quad |f'| \leq 10.$$

Exo 1

Donnez une autre fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ à dérivée bornée.

La continuité des fonctions à dérivée bornée II

Notre fonction $f := x \mapsto 5x + \sin \pi x$ vérifie

$$|f'| \leq 10.$$

On s'intéresse à ses valeurs au voisinage de $a := 2$.

Par IAF, on a, pour tout réel x

$$|f(x) - f(\pi)| \leq 10|x - a|.$$

Cette inégalité nous permet de contrôler f, on va voir en quel sens.

La continuité des fonctions à dérivée bornée III

Notre fonction $f := x \mapsto 5x + \sin \pi x$ vérifie

$$f(a) = 10.$$

Ce qu'on cherche, c'est

un intervalle autour de a dans lequel f reste entre 9.9 et 10.1.

Par IAF, on a, pour tout réel x

$$|f(x) - f(2)| \leq 10|x - 2|.$$

Pour garantir

$$|f(x) - f(2)| \leq 0.1,$$

il suffit d'imposer $10|x - 2| \leq 0.1$, autrement dit $|x - 2| \leq 0.01$ ou encore

$$1.99 \leq x \leq 2.01.$$

Exercice

Rappel

On a, pour tout réel x, $|f(x) - f(2)| \leq 10|x - 2|$.

Exo 2

Trouver un intervalle autour de 2 dans lequel f reste entre 9.98 et 10.02.

La continuité des fonctions à dérivée bornée IV

Rappel

On a, pour tout réel x, $|f(x) - f(2)| \leq 10|x - 2|$.

Problème de la continuité

Etant donné un nombre ϵ "petit" (genre 0.1, ou 0.02), on cherche un intervalle autour de 2 dans lequel f reste entre $10 - \epsilon$ et $10 + \epsilon$.

Solution :

pour garantir

$$|f(x) - f(2)| \leq \epsilon,$$

il suffit d'imposer

$$|x - 2| \leq \frac{\epsilon}{10}.$$

Autrement dit : pour garantir $10 - \epsilon \leq f(x) \leq 10 + \epsilon$ il suffit d'imposer $2 - \eta \leq x \leq 2 + \eta$ avec $\eta := \frac{\epsilon}{10} > 0$.

Exercice

Exo 3

On pose $f := x \mapsto 2x + \cos \pi x$. Trouver un majorant de $|f'|$ puis un intervalle de centre 3 dans lequel f reste dans l'intervalle $[5 - \epsilon, 5 + \epsilon]$, où ϵ est un réel strictement positif donné.